

# Préparer une simulation éternelle

Jean-Baptiste Fouvry, IAP  
fouvry@iap.fr

IAP, Nuit de l'Astronomie  
Juin 2023

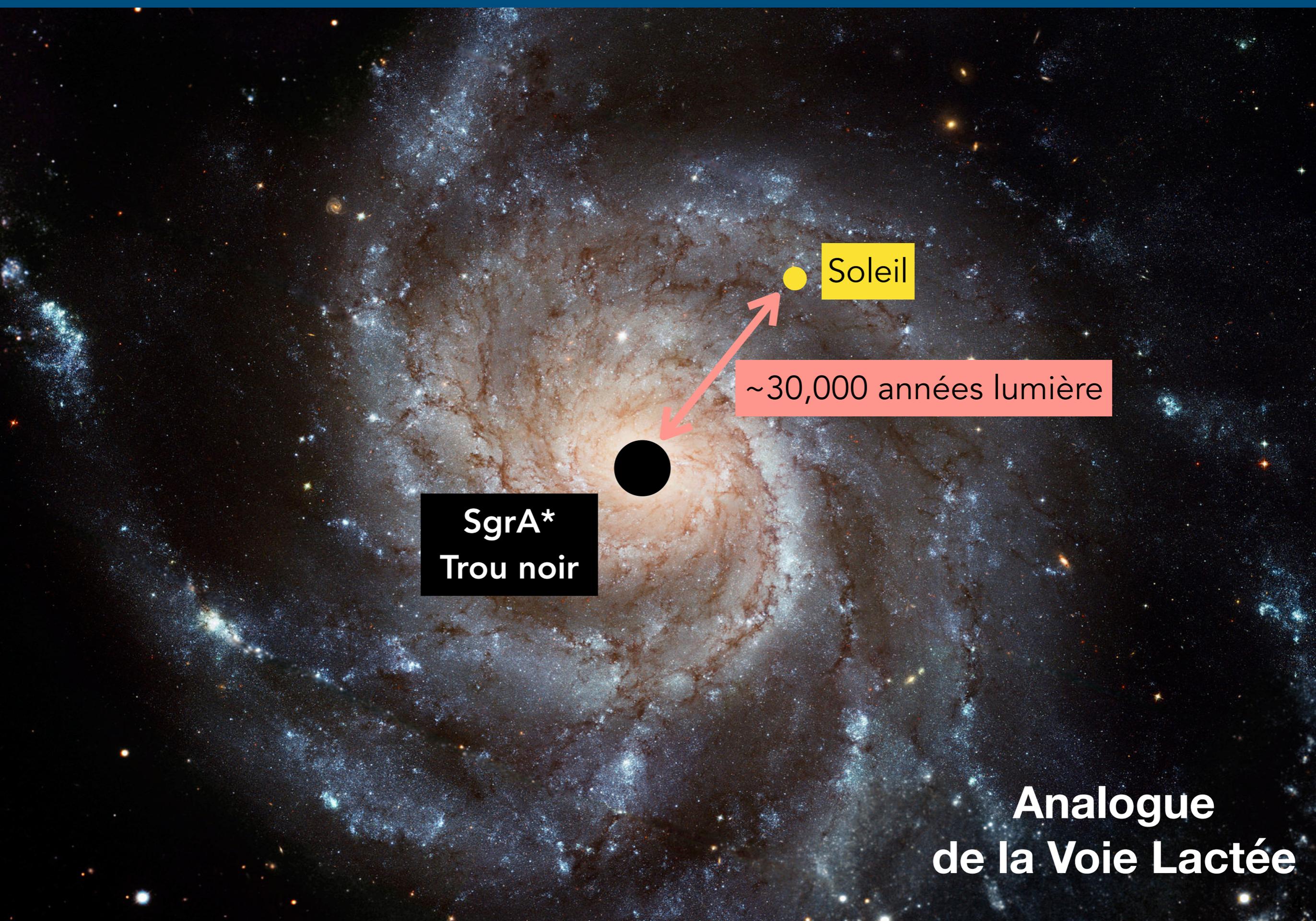
# Préparer une simulation éternelle d'étoiles autour d'un trou noir supermassif

Jean-Baptiste Fouvry, IAP  
fouvry@iap.fr

IAP, Nuit de l'Astronomie  
Juin 2023



**Analogue  
de la Voie Lactée**



**SgrA\***  
**Trou noir**

**Soleil**

**~30,000 années lumière**

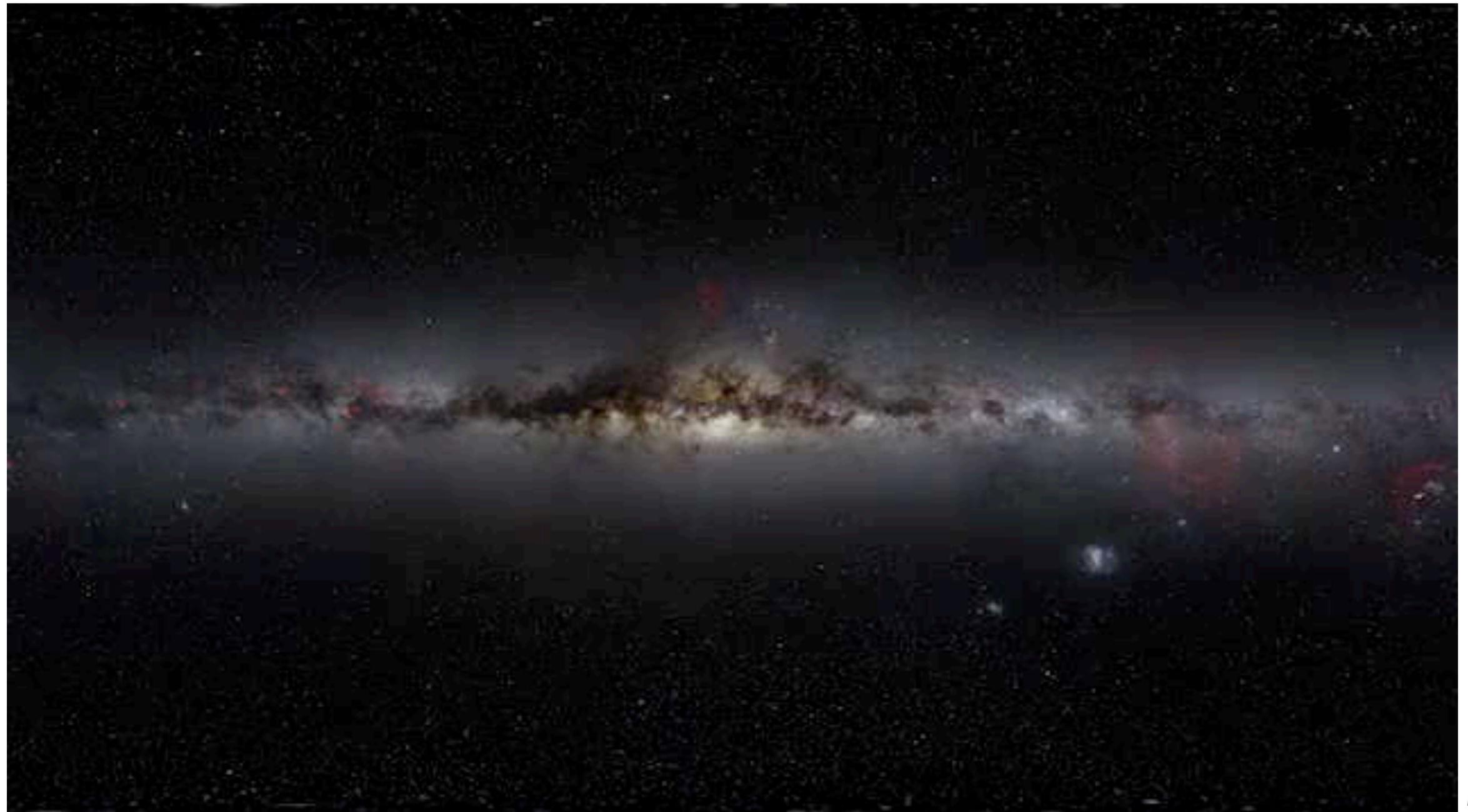
**Analogue  
de la Voie Lactée**

# SgrA\*, notre centre galactique



**Voie Lactée** ( $10^{17}$  km)

# SgrA\*, notre centre galactique

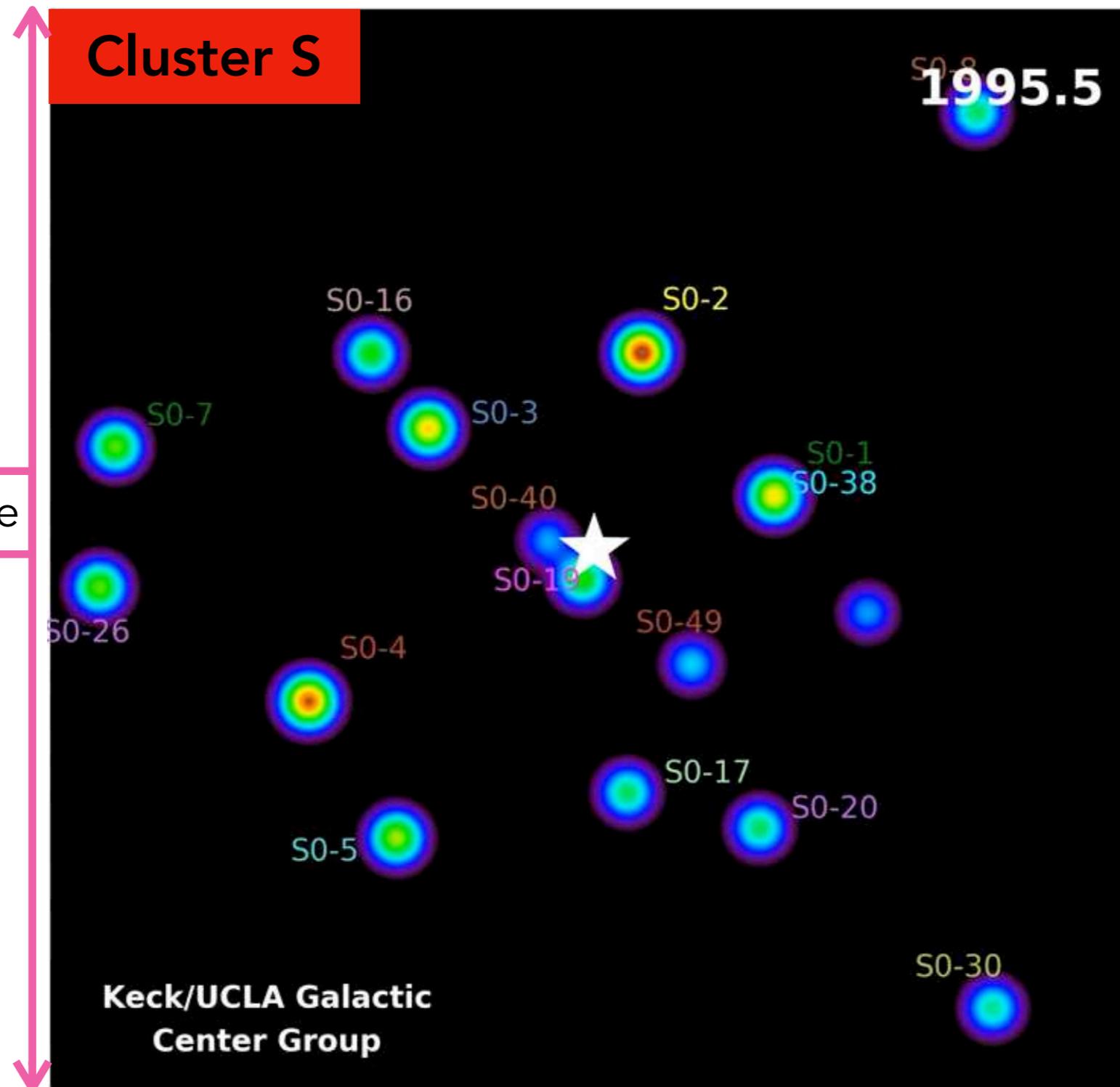


ESO



Zoom (x10,000,000)

# SgrA\*, au centre de la Voie Lactée

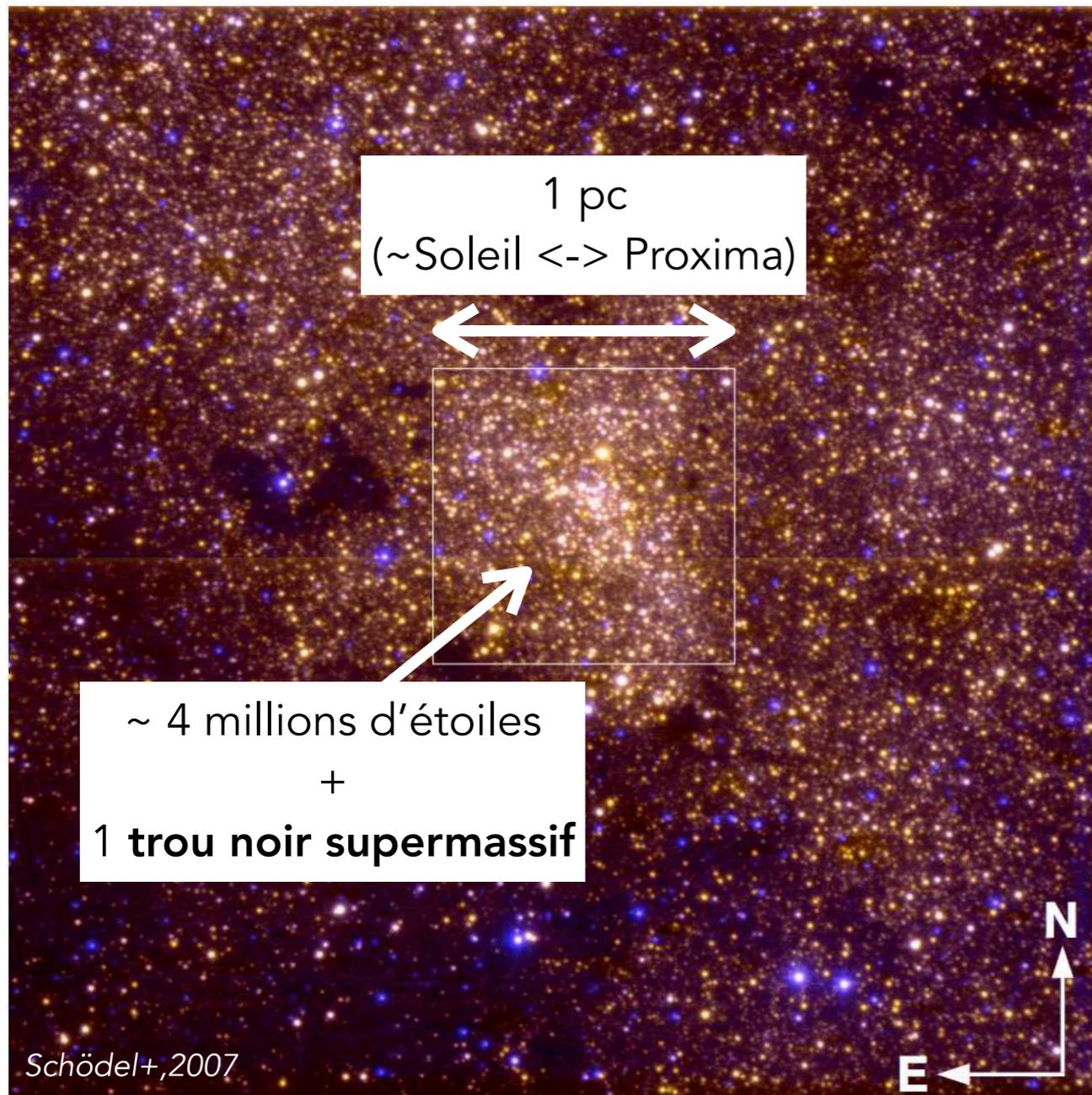


~0.1 année lumière

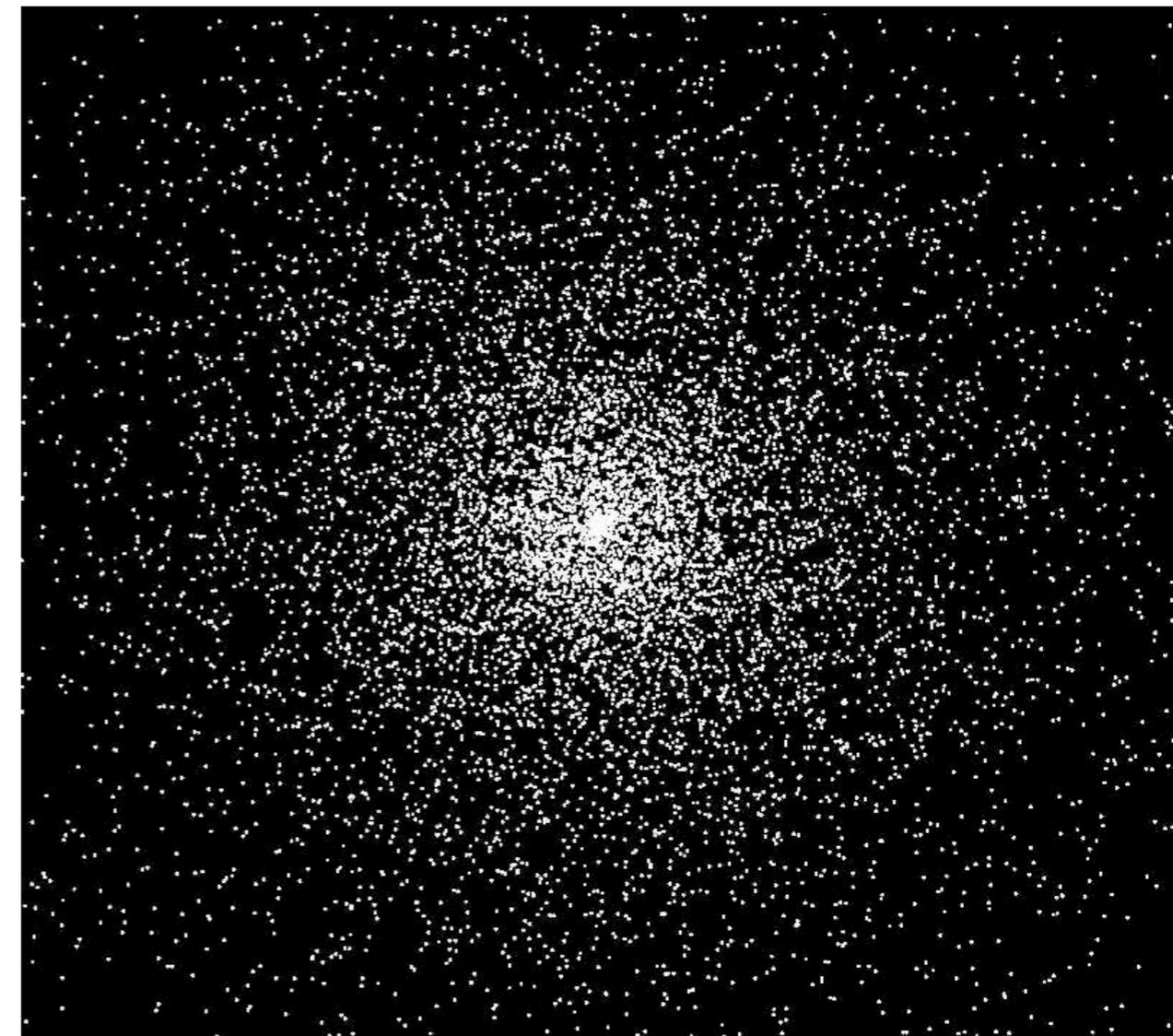
Quelle est la diète des **trous noirs supermassifs** ?

# Un environnement extrêmement dense

Se comporte comme un **gaz d'étoiles**



Observations du VLT



Simulations numériques

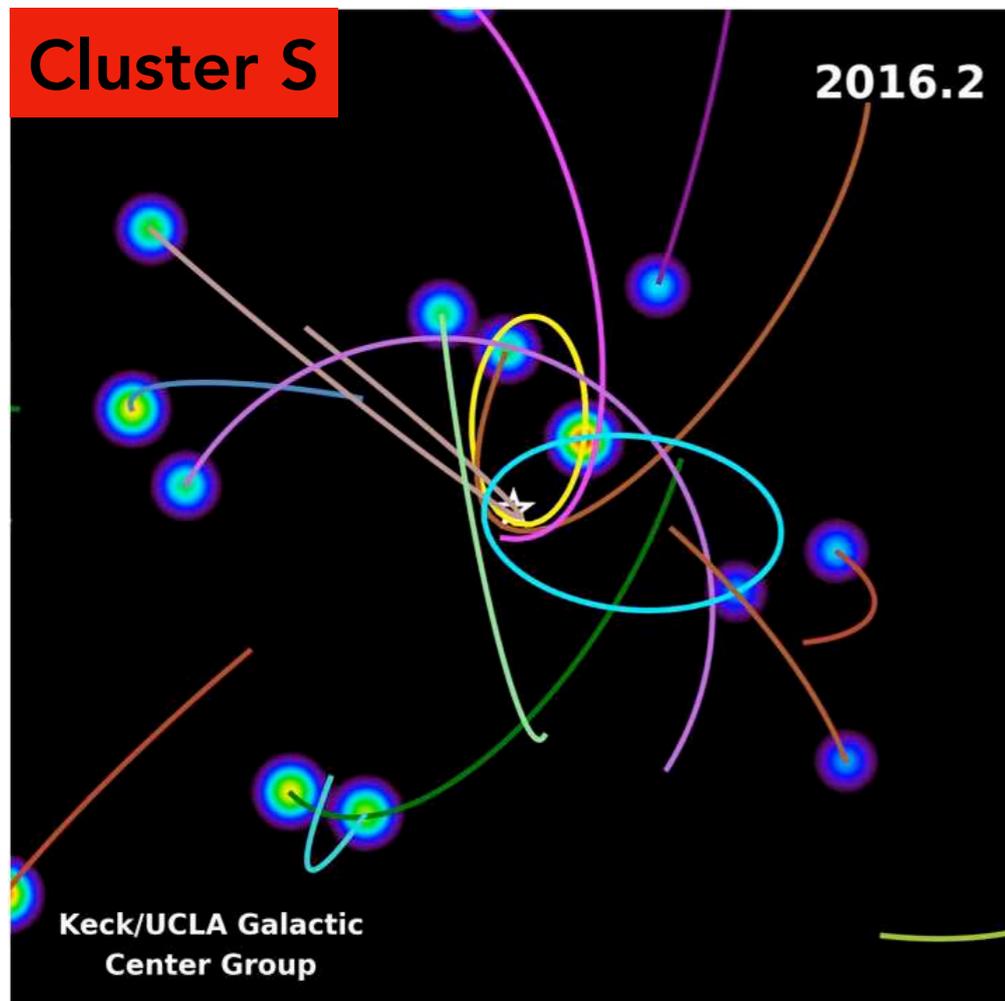
# Une dynamique simple ?

Le trou noir central est **supermassif**

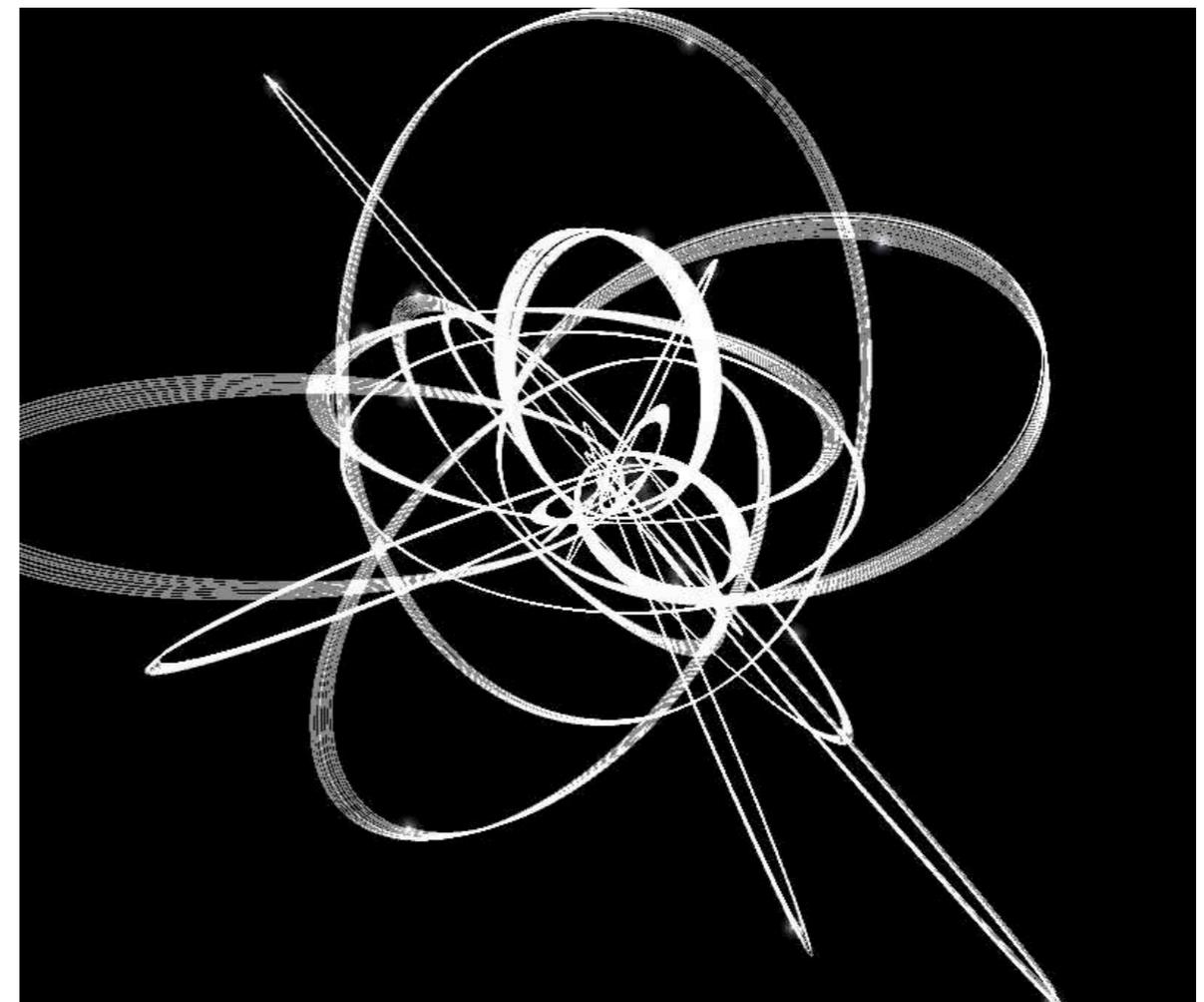
$$M_{\text{SgrA}} \simeq 4,200,000 \times M_{\text{Soleil}}$$

vs.

$$M_{\text{Soleil}} \simeq 330,000 \times M_{\text{Terre}}$$



Observations du Keck



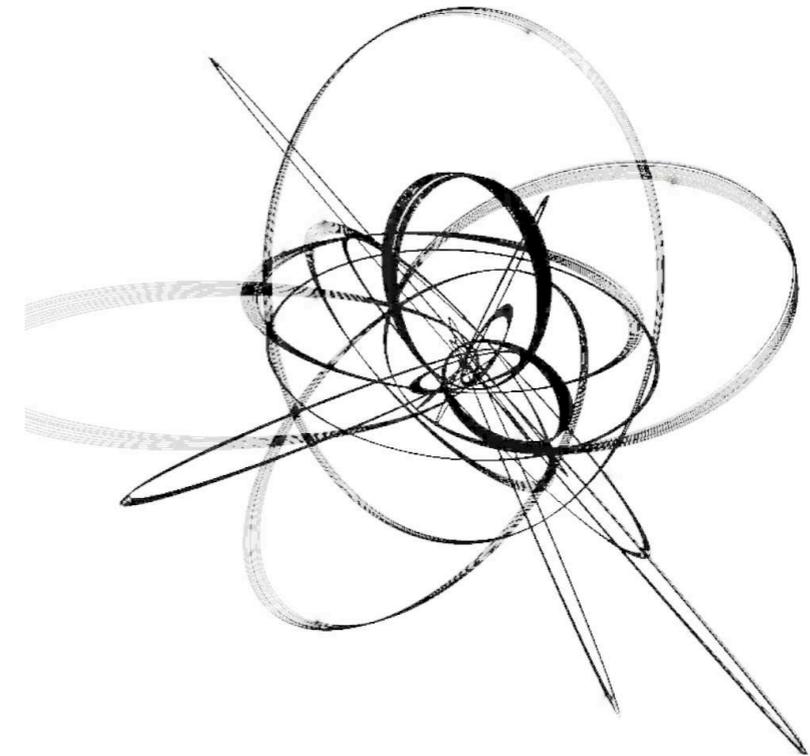
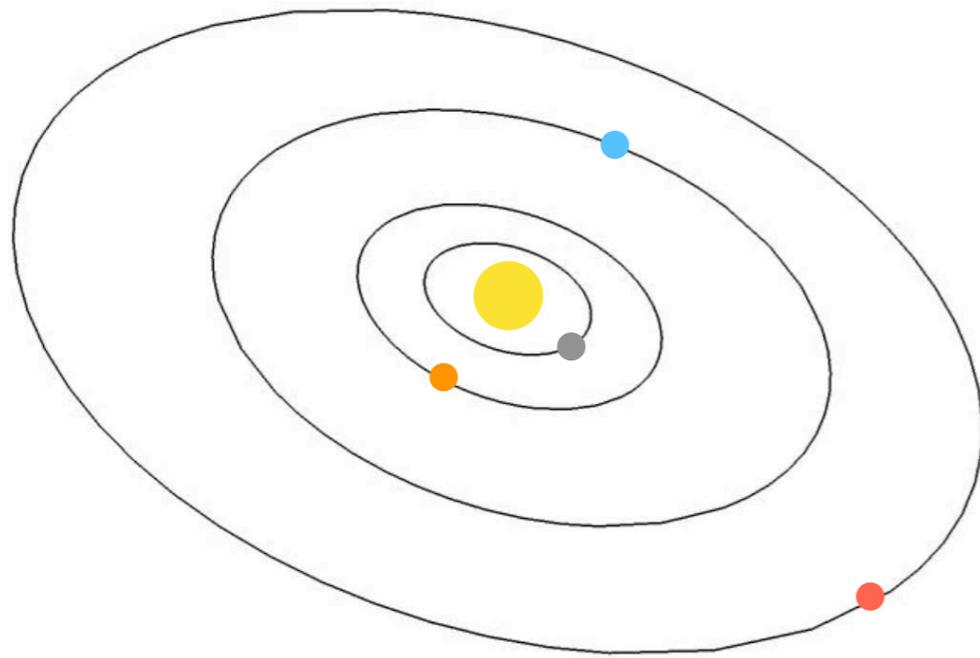
Simulations numériques

Comme la Terre autour du Soleil, les étoiles suivent des **orbites Képlériennes**

# Systemes Képlériens

**Systeme solaire**

**Centre galactique**



**Planètes**

Objet léger

**Etoiles**

**Soleil**

Objet lourd

**Trou noir**

$N \simeq 10$

Nombre de "particules"

$N \simeq 10^6$

Symétrie **planaire**

Forme du système

Symétrie **sphérique**

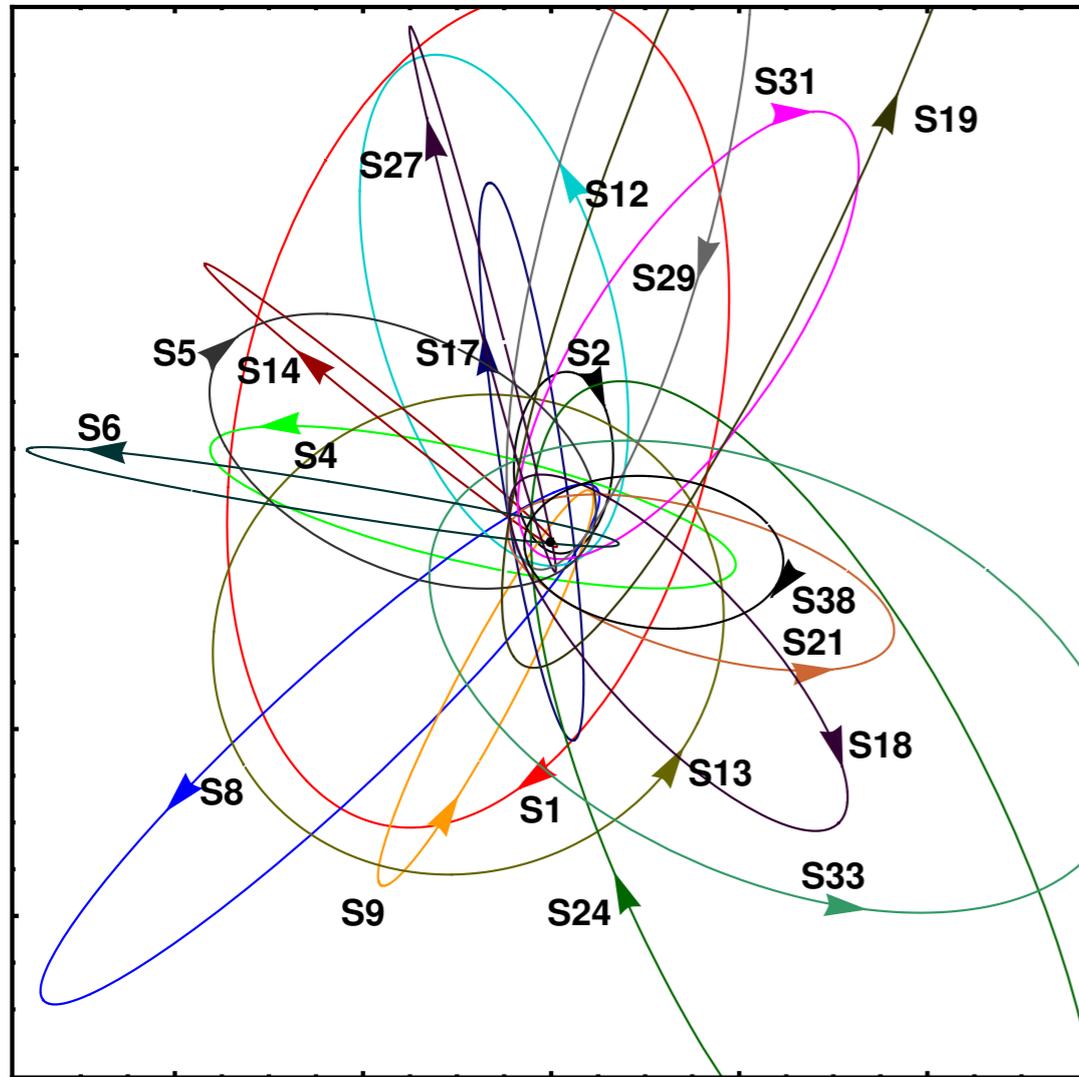
Orbites **quasi-circulaires**

Forme des orbites

Orbites **très excentriques**

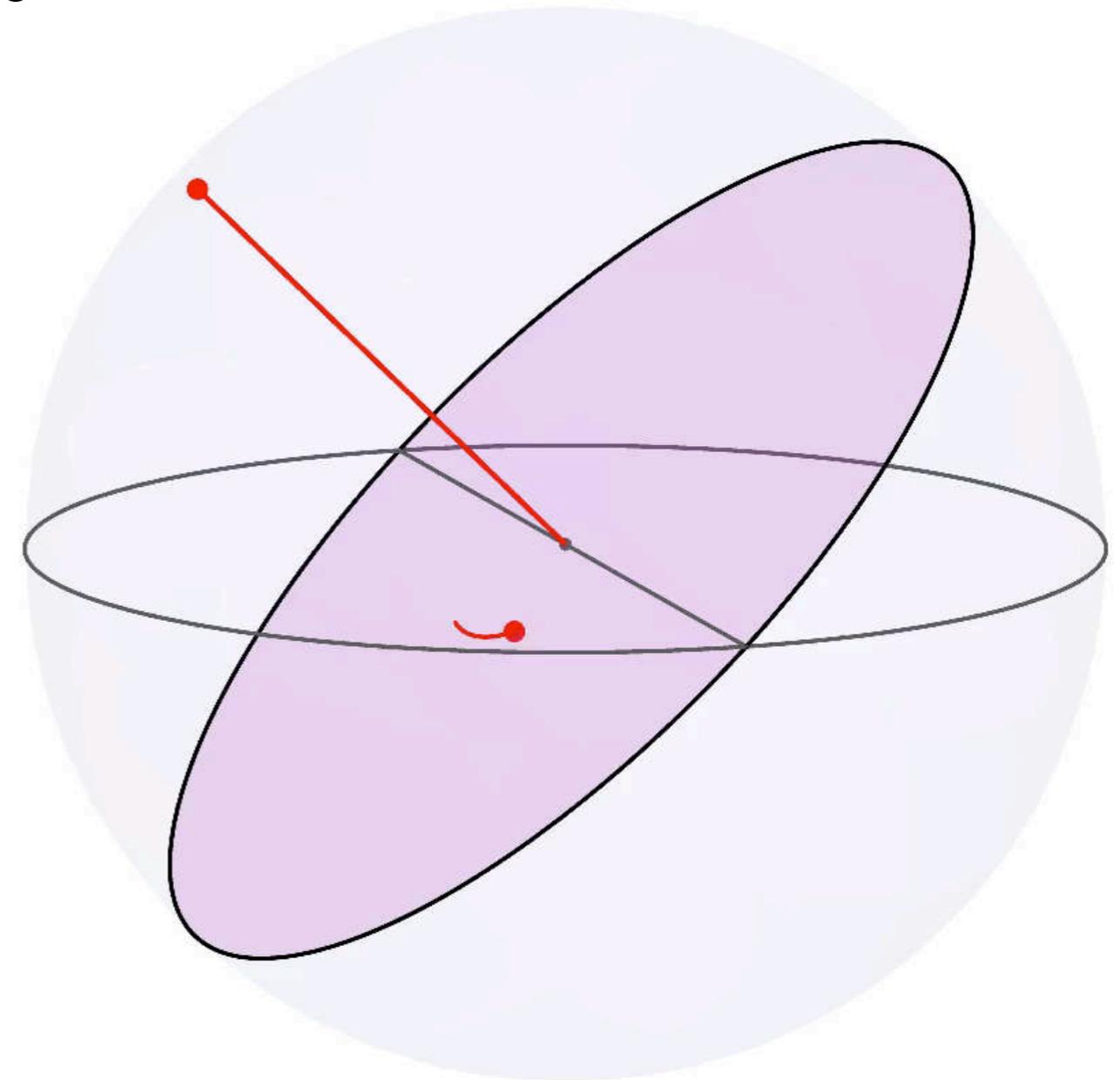
# Une orbite Képlérienne

Le trou noir domine l'évolution des étoiles



*Gillessen et al., 2009*

Observations du VLT

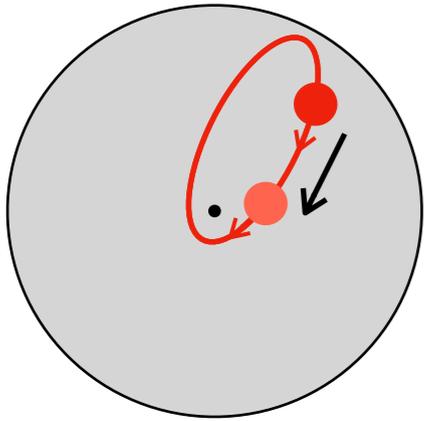


Orbite typique

# Qu'est-ce qu'une orbite ?

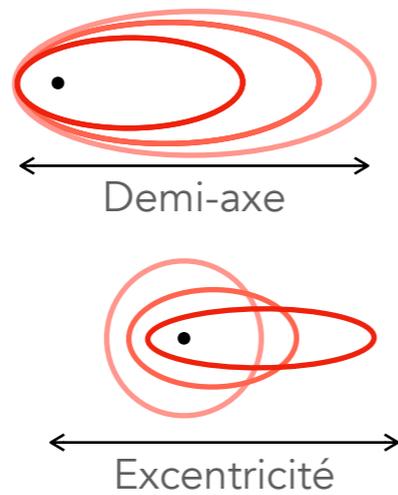
## Décrire une orbite

### Position de l'étoile

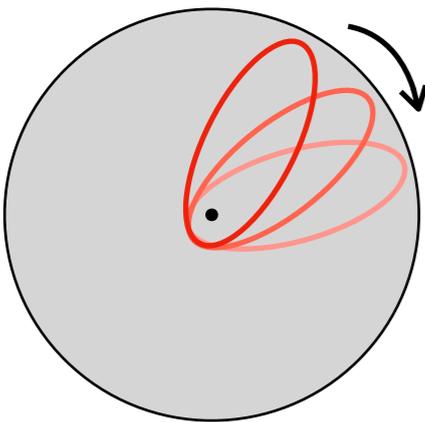


Mouvement dynamique

### Forme de l'orbite

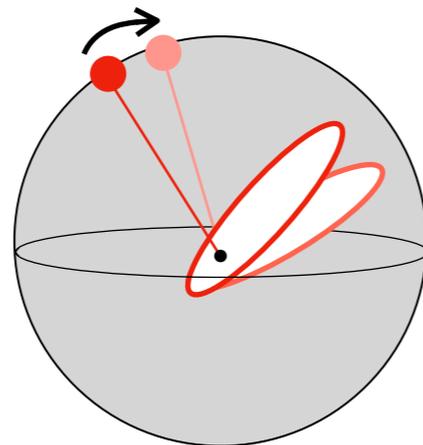


### Phase de l'orbite



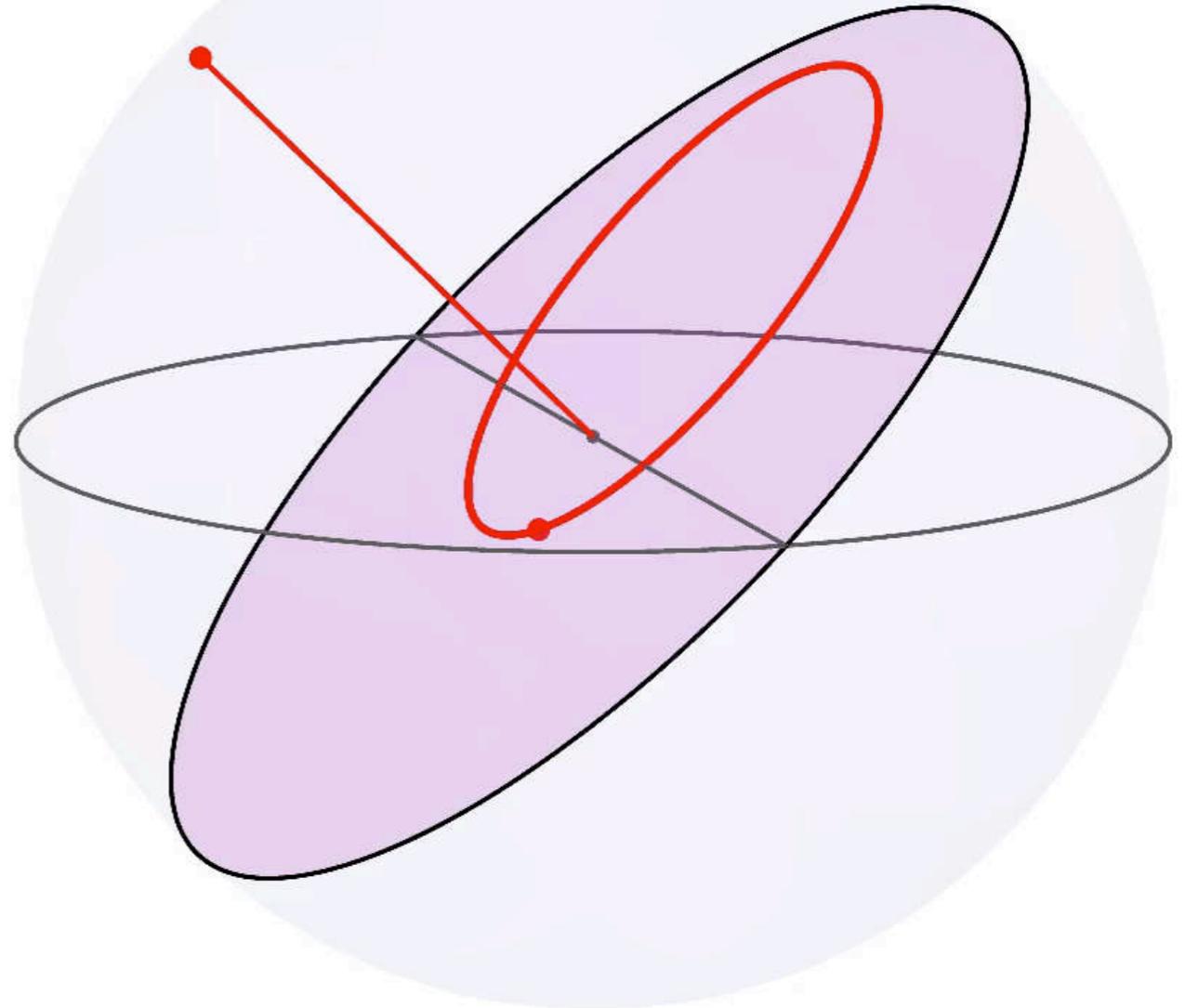
Phase du péricentre

### Orientation de l'orbite



Orientation spatiale

~15 ans

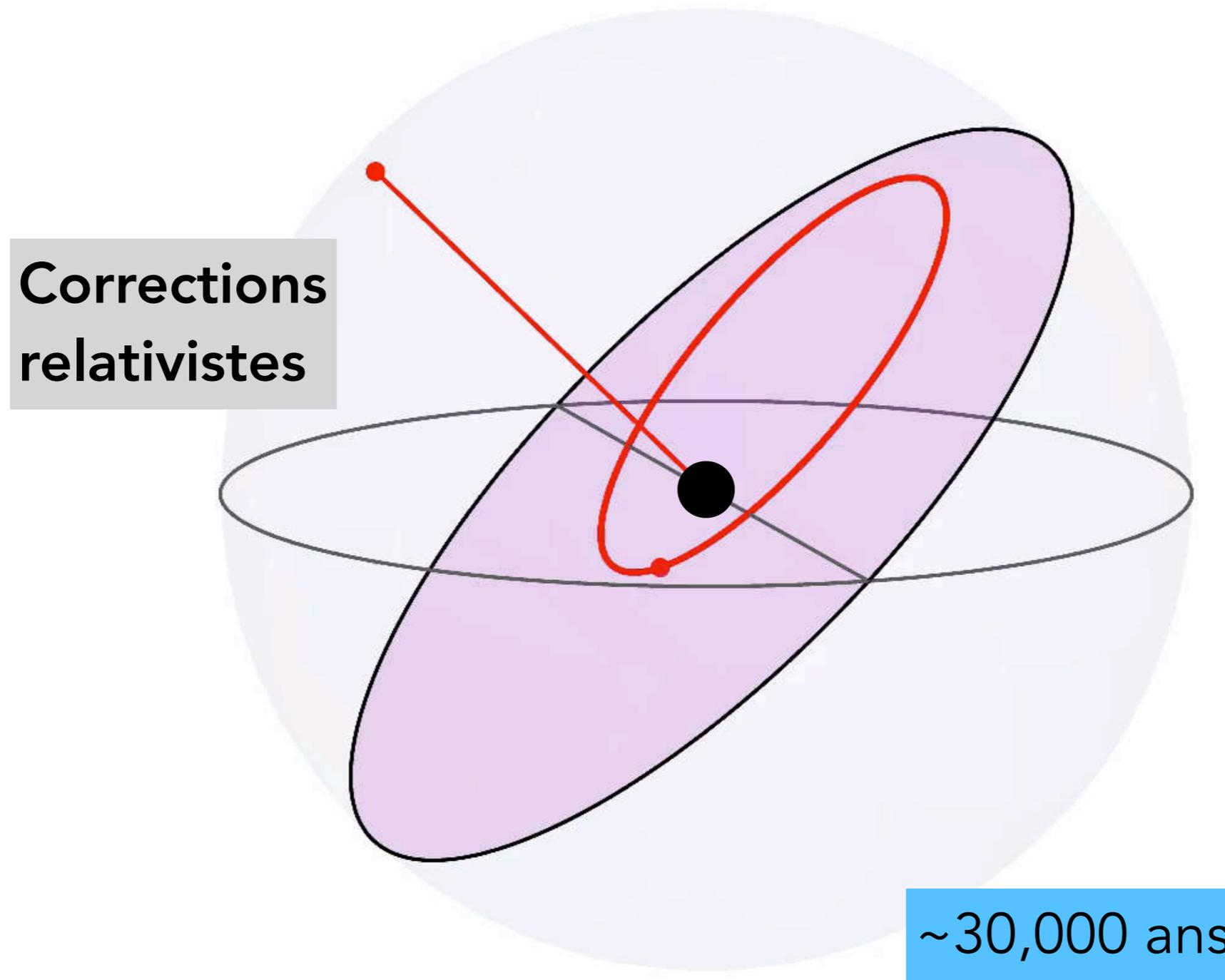


Orbite Képlérienne

Quelle est l'évolution des orbites ?

## Evolution dans le plan

Le trou noir est **supermassif**



Les orbites tournent dans leur plan

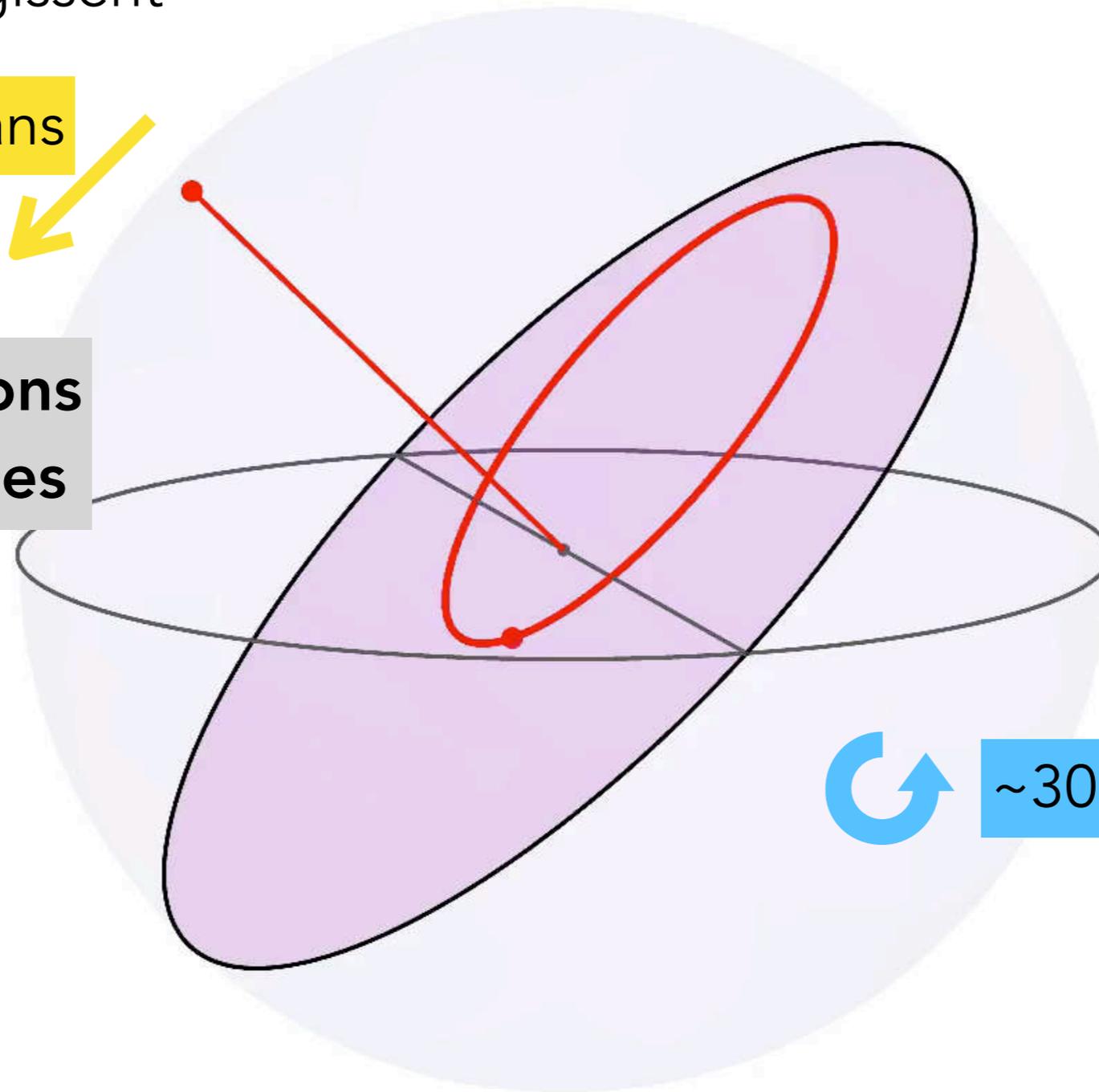
## Evolution hors du plan

Les étoiles interagissent

~1,000,000 ans



Perturbations  
entre étoiles



~30,000 ans

Deux échelles de temps :

**Précession**



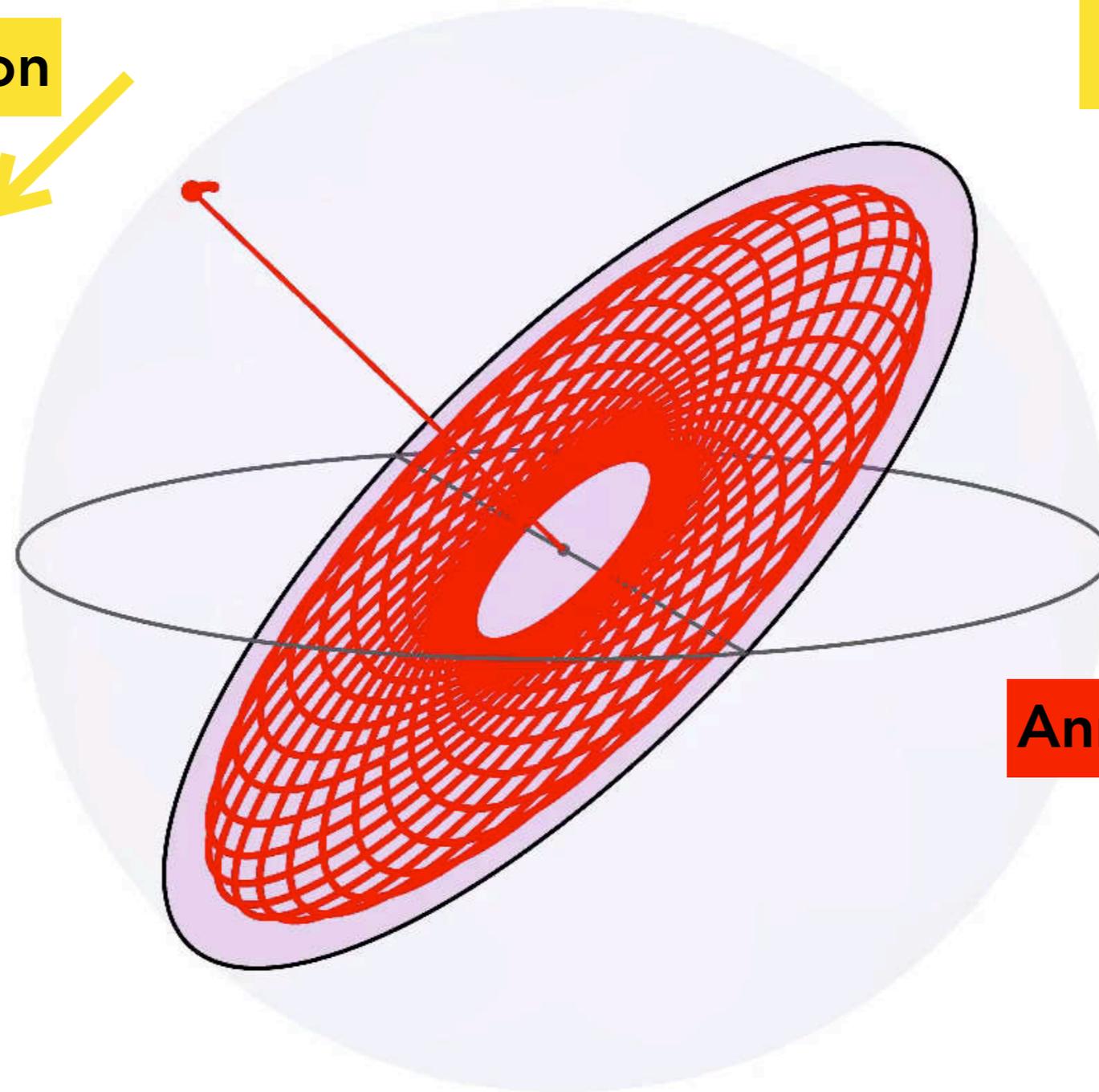
**Orientation**

## Evolution des orientations

Orientation



Temps typique  
~1,000,000 ans

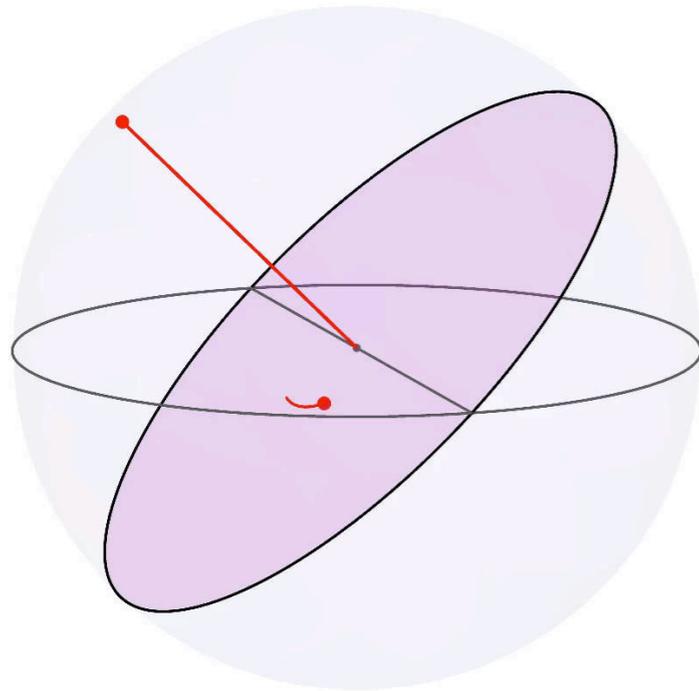


Anneau

Les **ellipses** deviennent des **anneaux**

## Dynamique à long terme

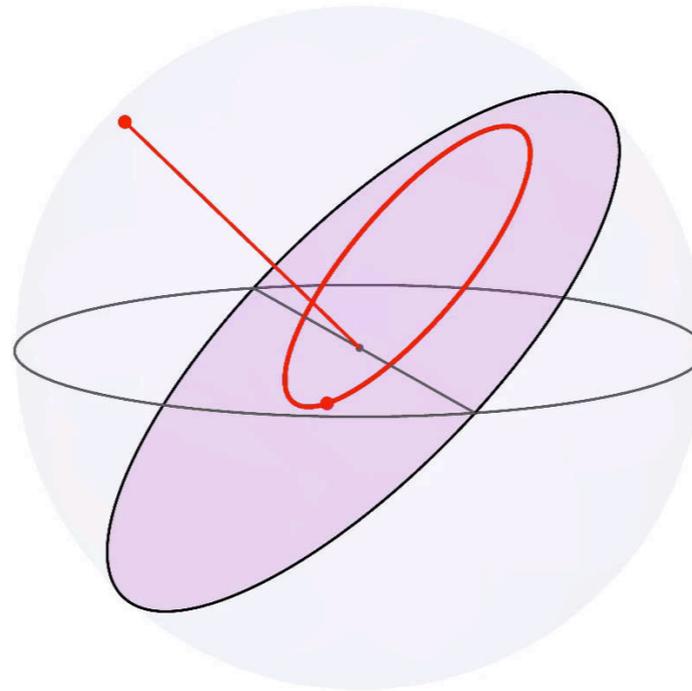
Etoiles



15 ans

Mouvement **orbital**

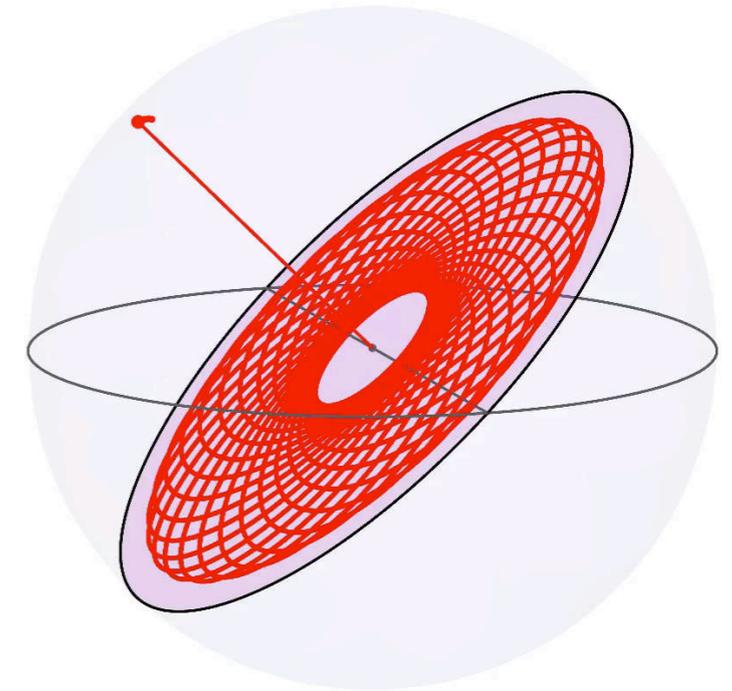
Ellipses



30,000 ans

Précession **péricentre**

Anneaux

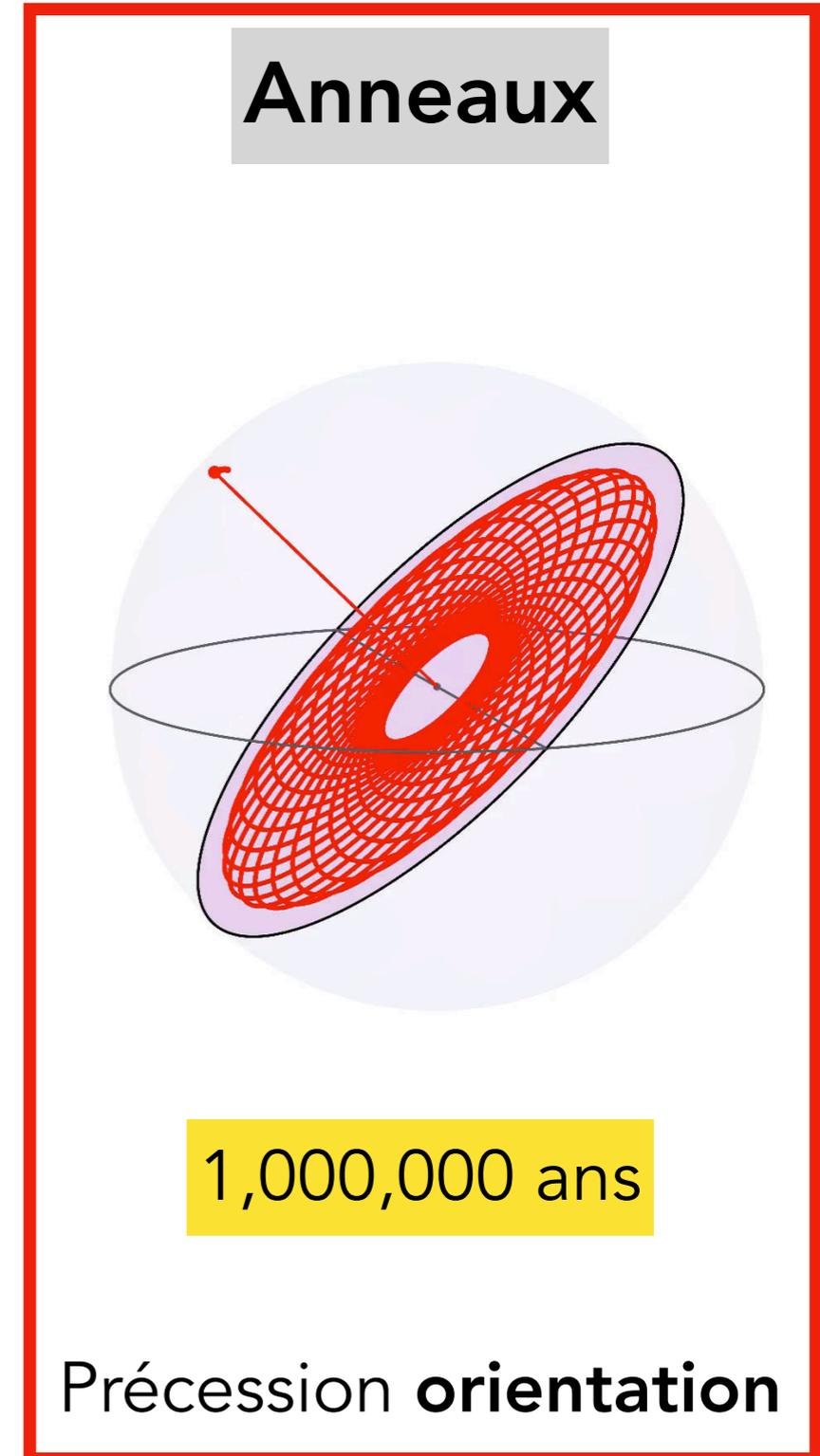
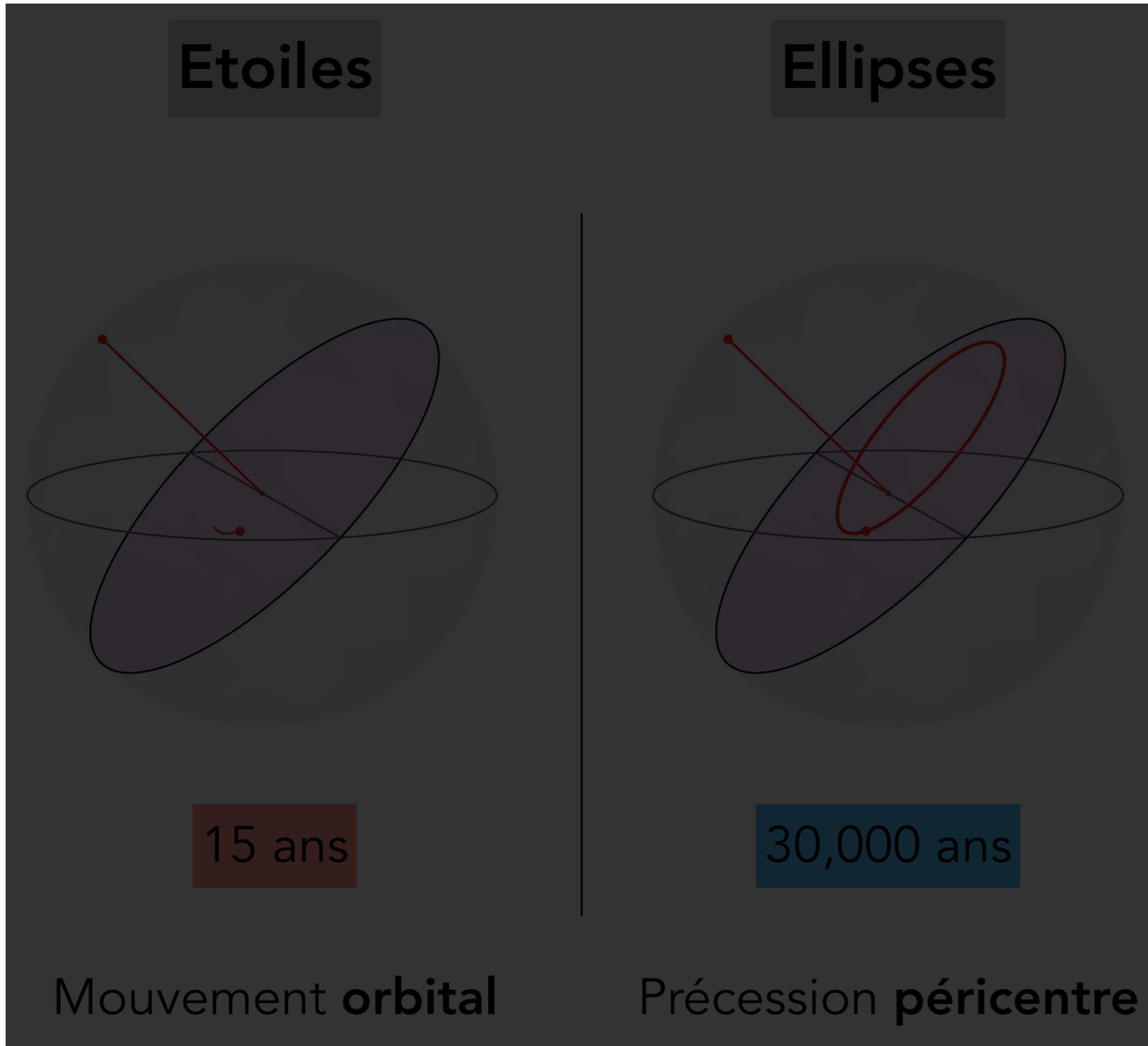


1,000,000 ans

Précession **orientation**

Comment simuler ces systèmes sur le **(très) long terme** ?

# Dynamique à long terme



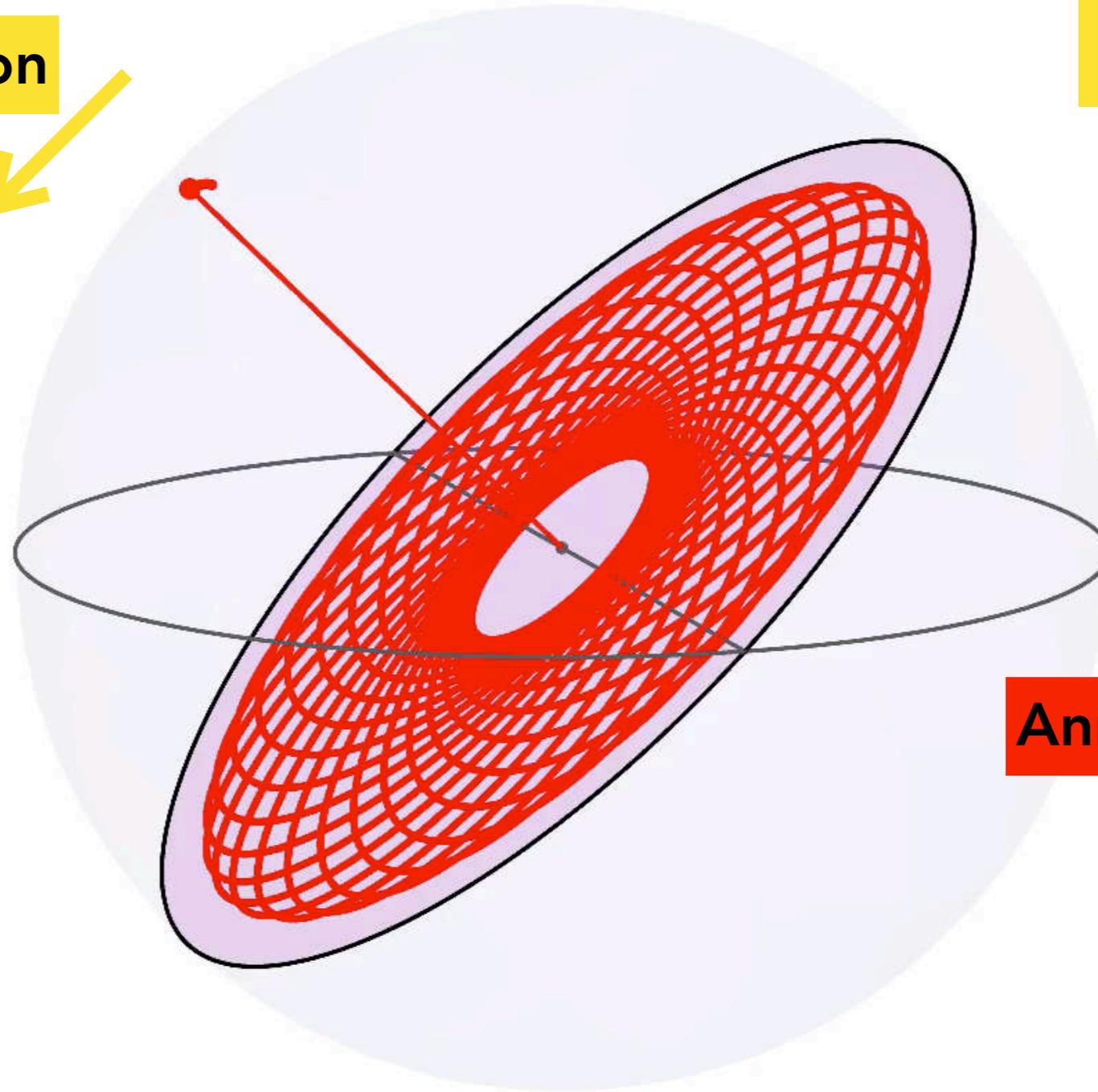
Comment simuler les orientations sur le **(très) long terme** ?

## Orientation des orbites

Orientation



Temps typique  
~1,000,000 ans



Anneau

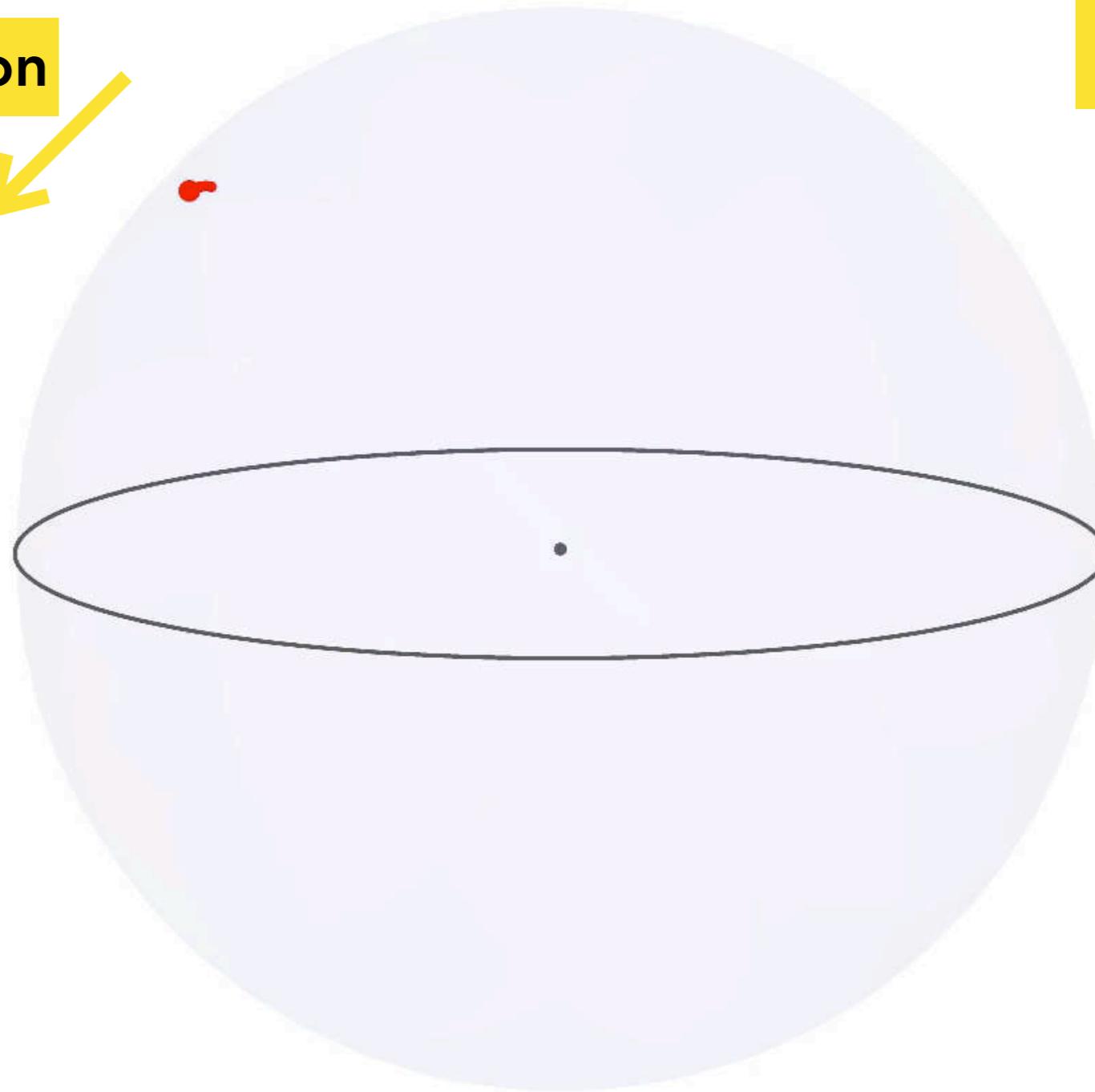
Dynamique d'**anneaux massifs**

## Orientation des orbites

Orientation



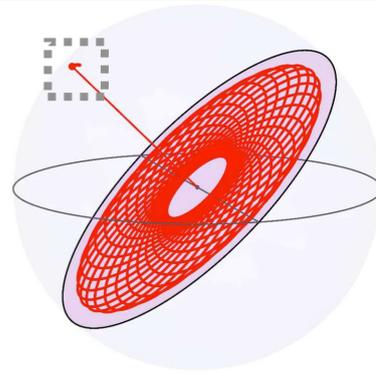
Temps typique  
~1,000,000 ans



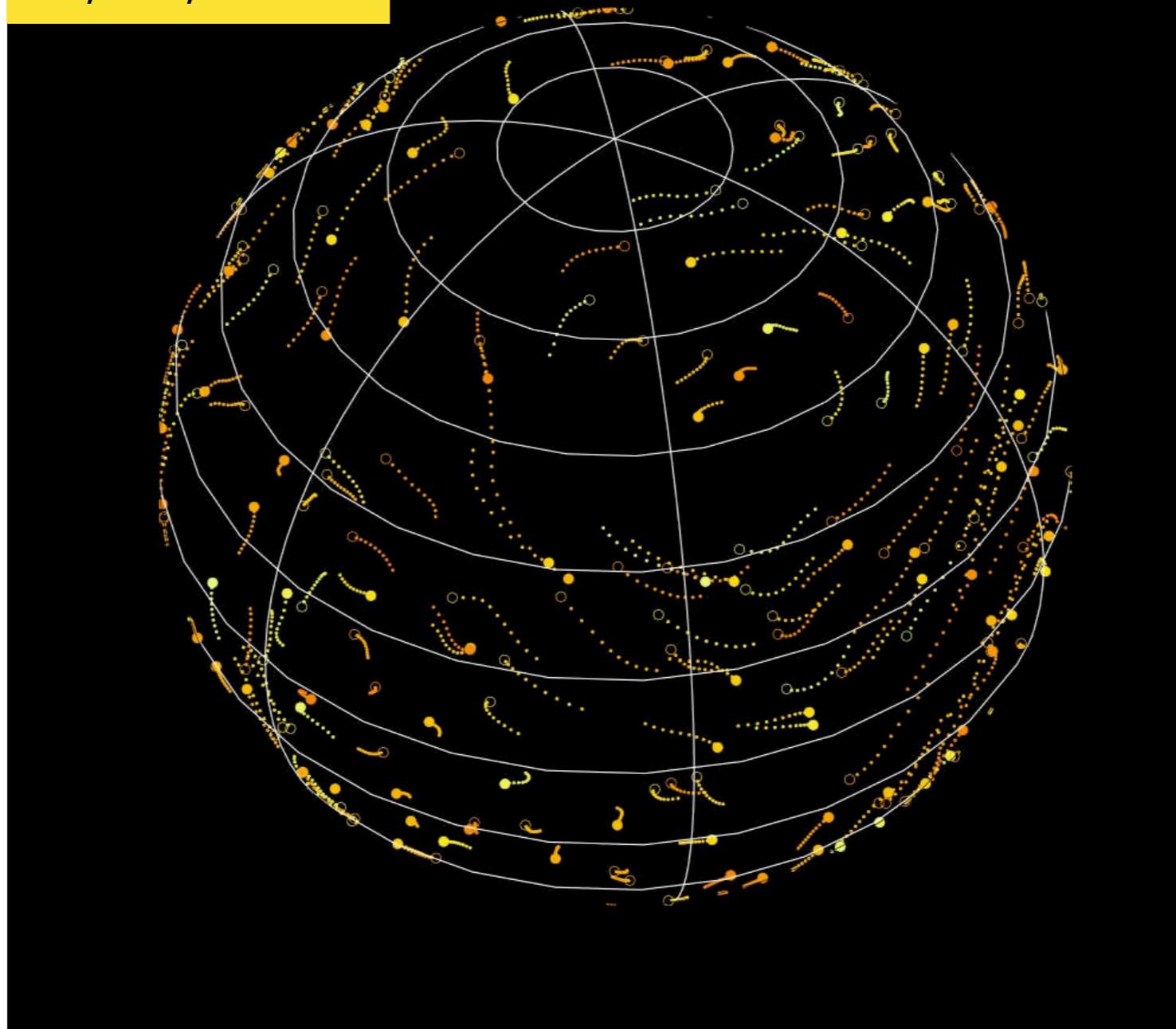
Une orientation, c'est un point sur **la sphère unité**

# Diffusion des orientations

Les orientations interagissent et évoluent **erratiquement**

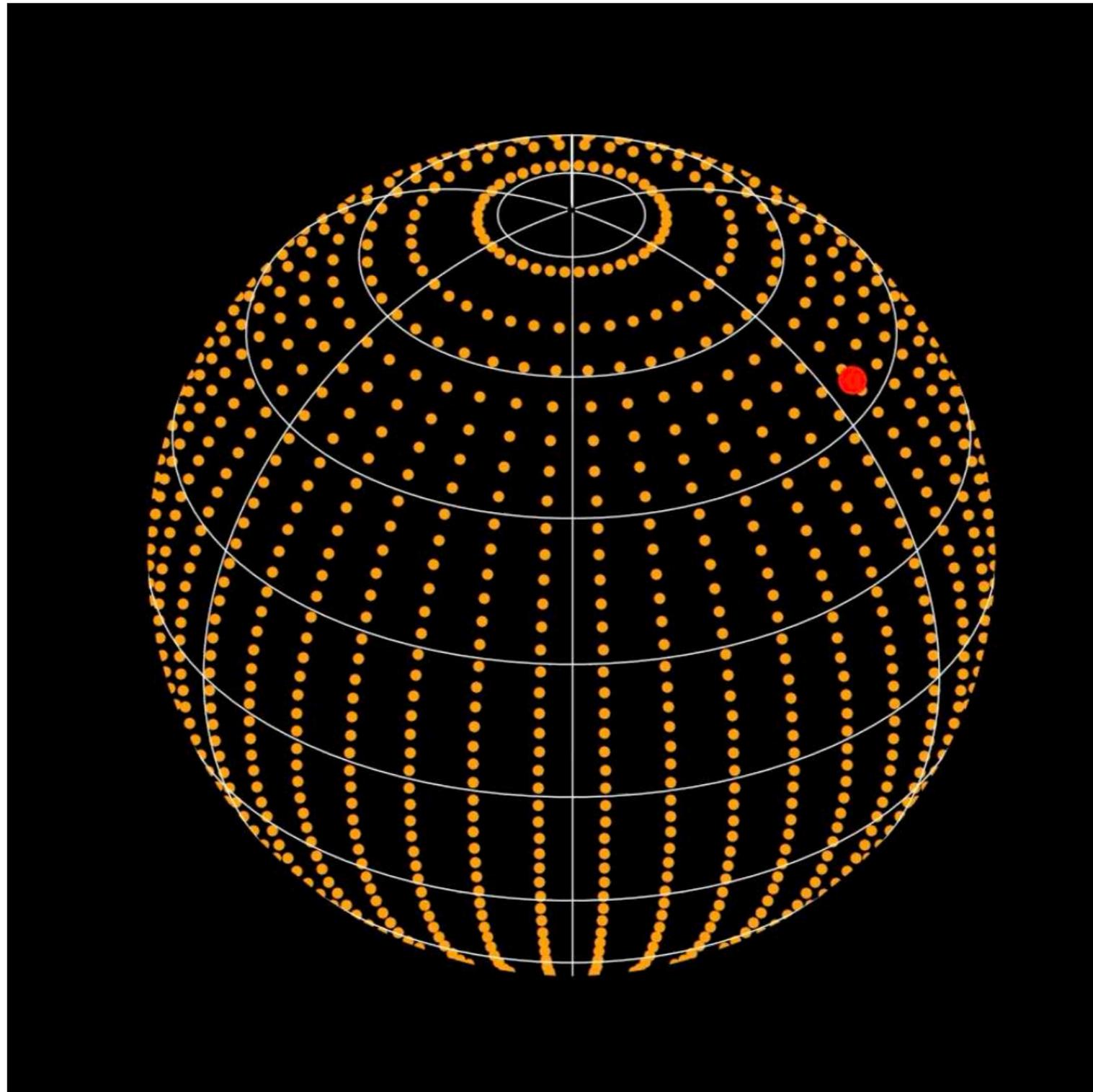
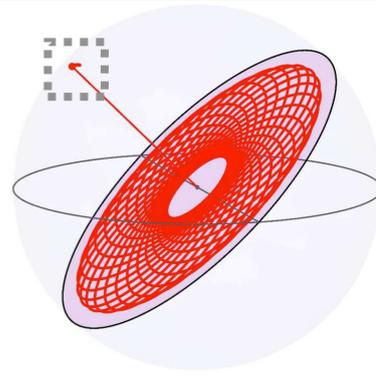


Temps typique  
~1,000,000 ans



La dynamique est **complexe**. Commençons simple

# Problème à deux corps restreint



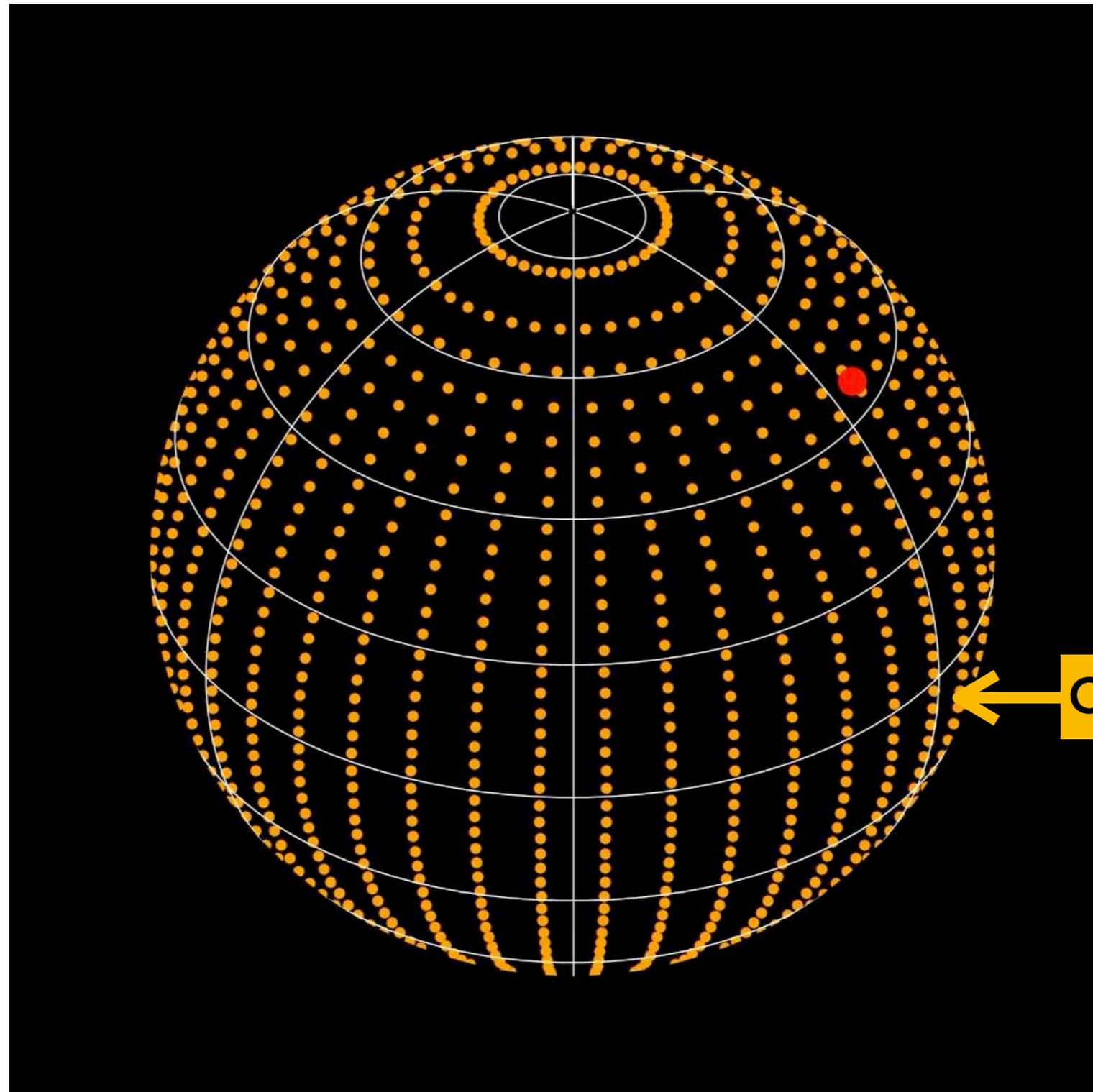
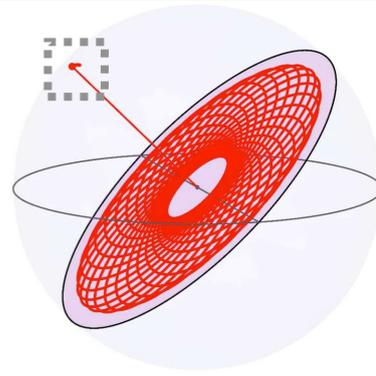
Etoile massive



Etoiles  
(très) légères

Dynamique induite par une **étoile massive** ?

# Problème à deux corps restreint



Etoile massive

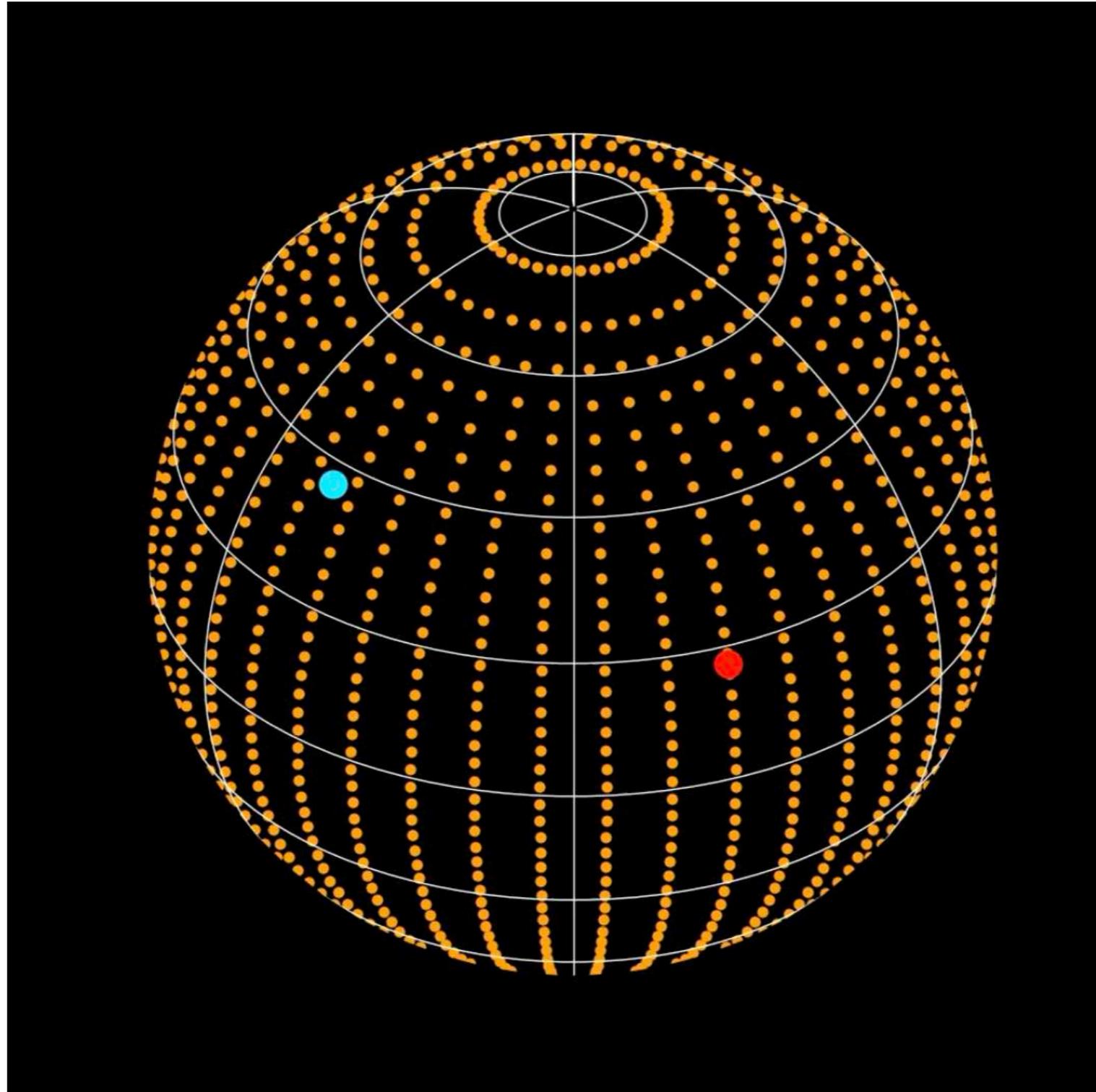
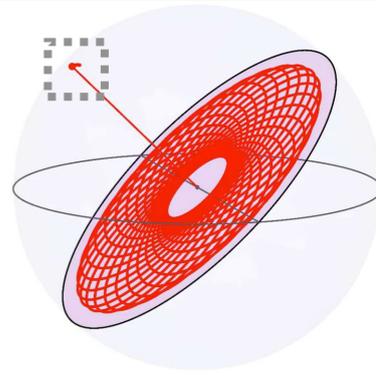


Etoiles  
(très) légères

Orbites

Orbites simples autour de l'objet massif

# Problème à trois corps restreint



Etoile massive



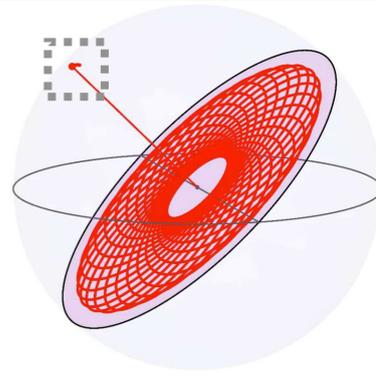
Etoile massive



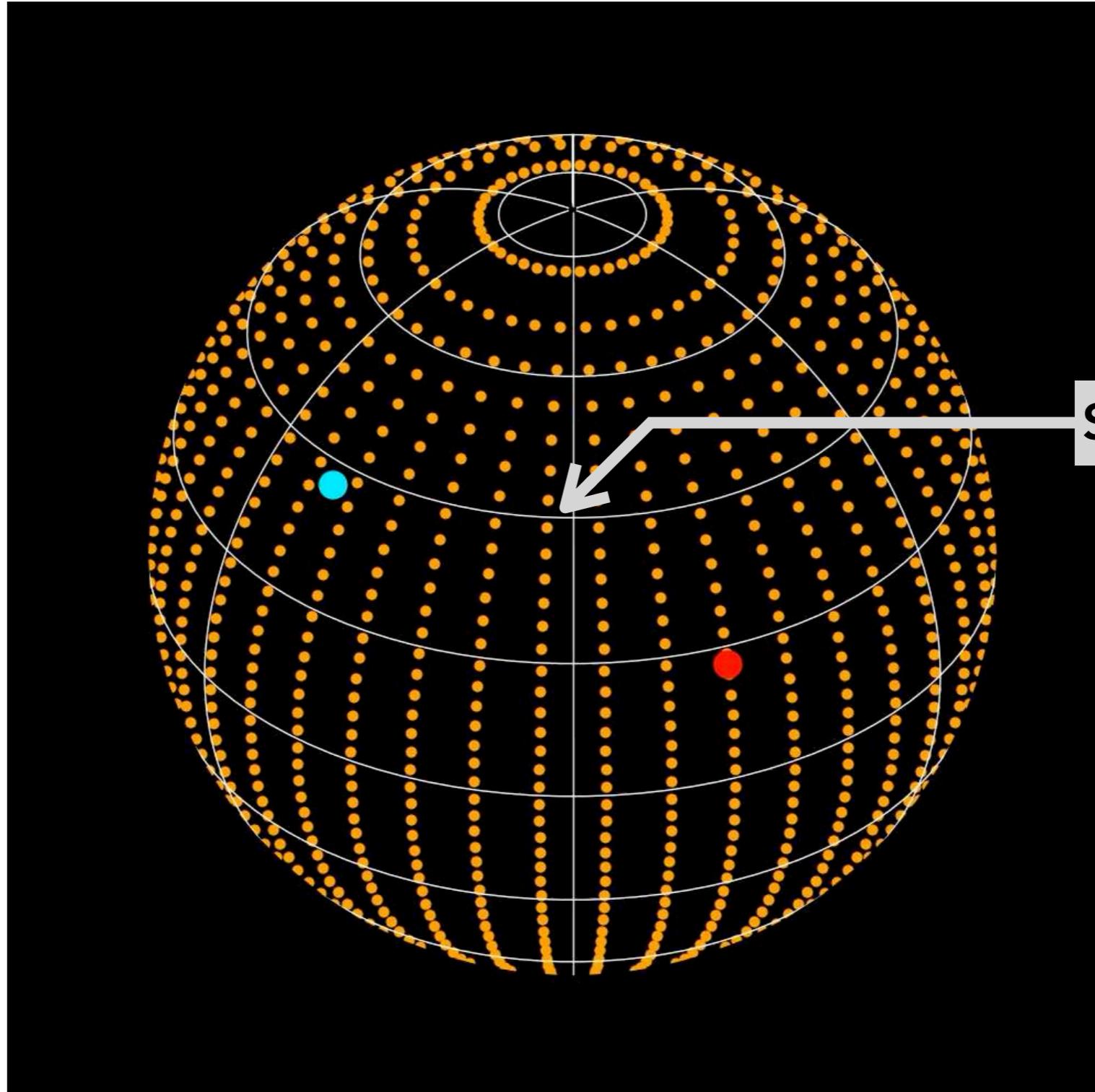
Etoiles  
(très) légères

Dynamique induite par **deux étoiles massives fixes** ?

# Problème à trois corps restreint



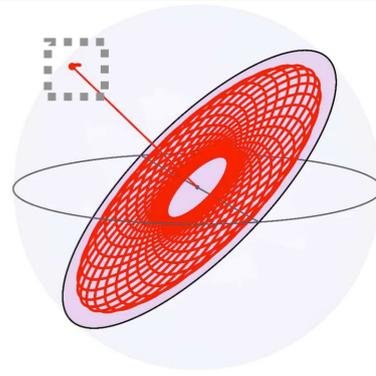
-  Etoile massive
-  Etoile massive
-  Etoiles (très) légères



Séparatrice

Etoiles attirées par chaque étoile **respectivement**

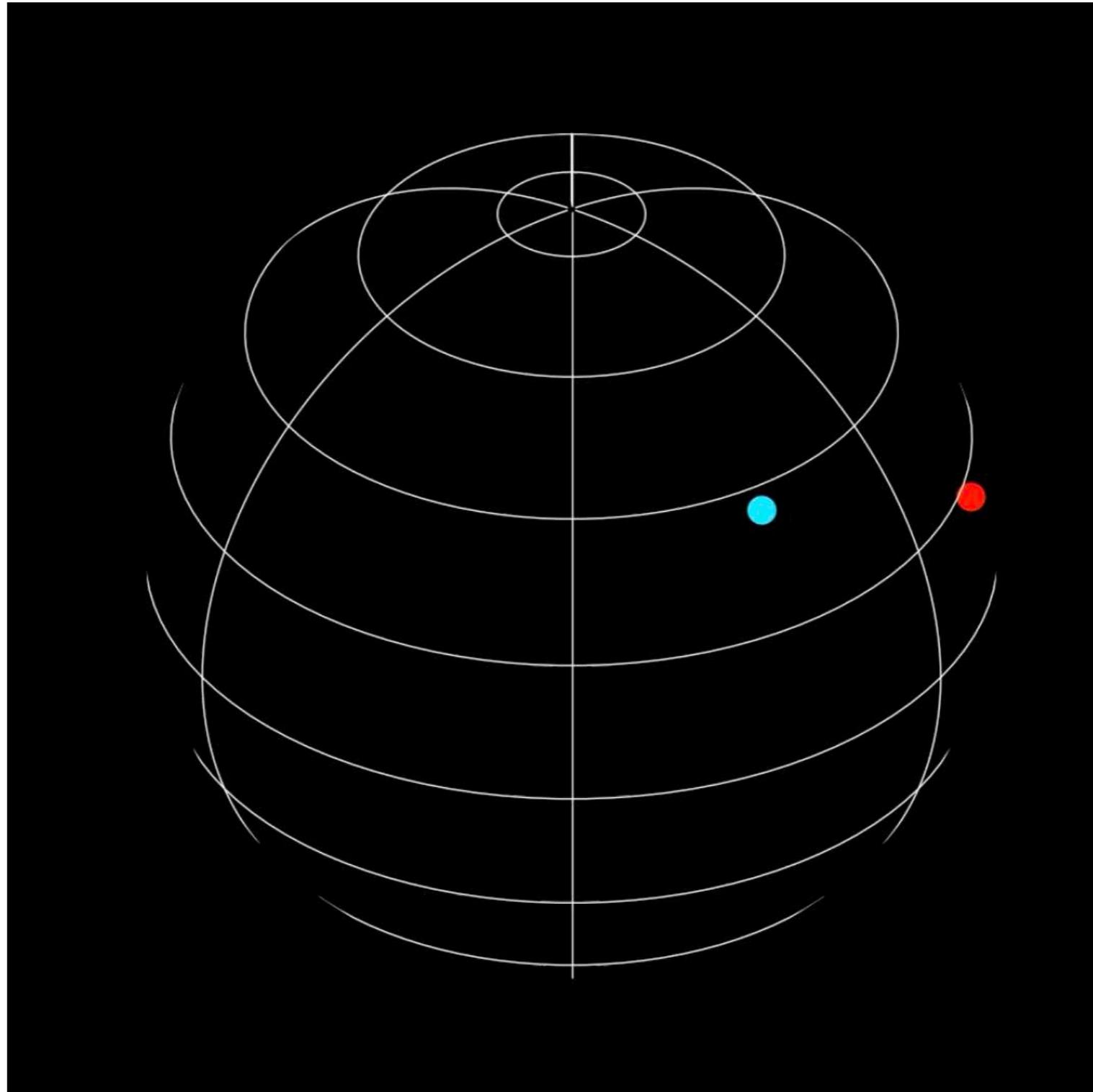
# Problème à deux corps (le vrai)



Etoile massive

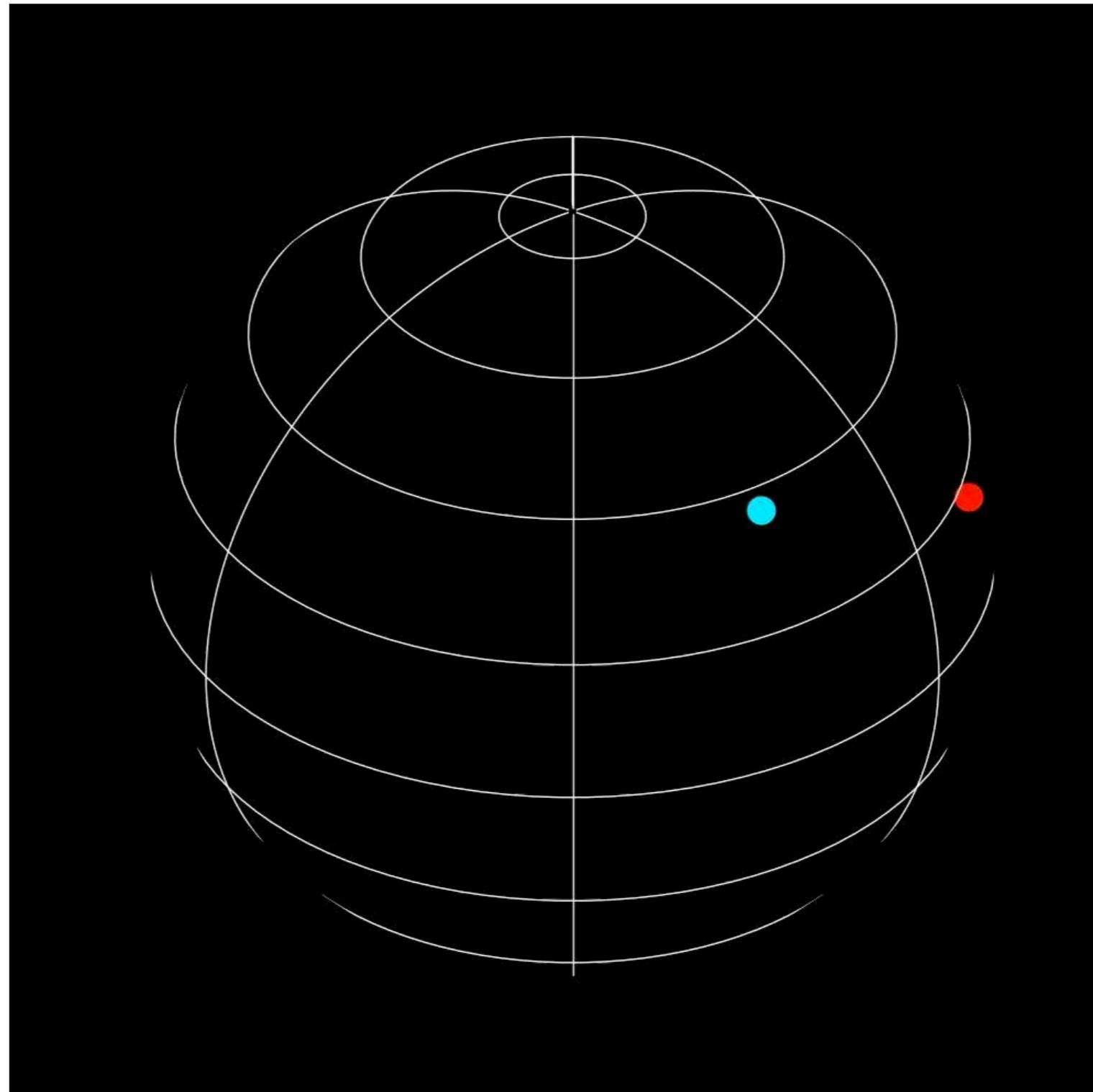
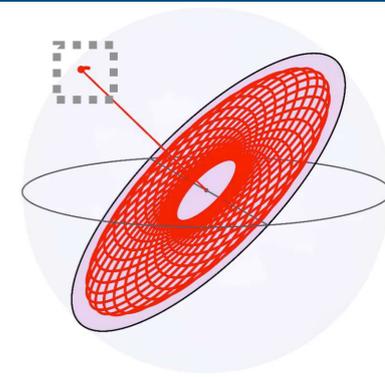


Etoile massive



Deux étoiles **massives** ensemble ?

# Problème à deux corps (le vrai)



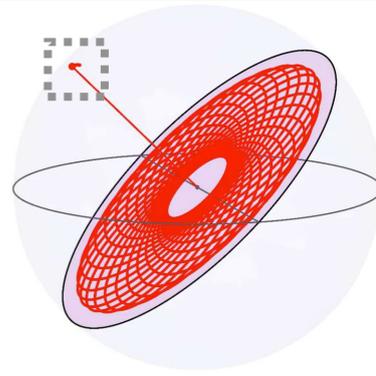
Etoile massive



Etoile massive

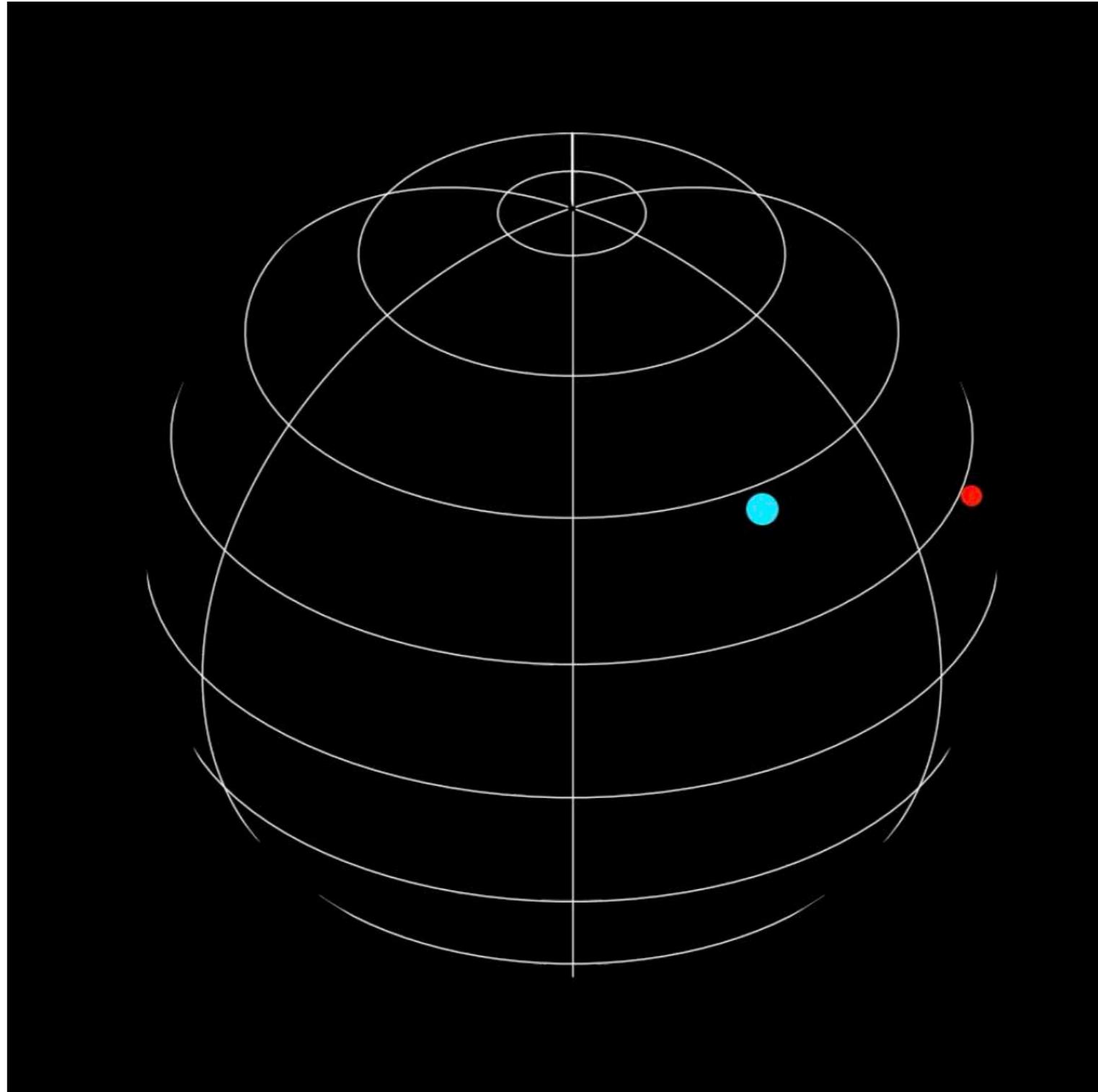
Les étoiles orbitent autour de leur "centre"

# Problème à deux corps (le plus que vrai)



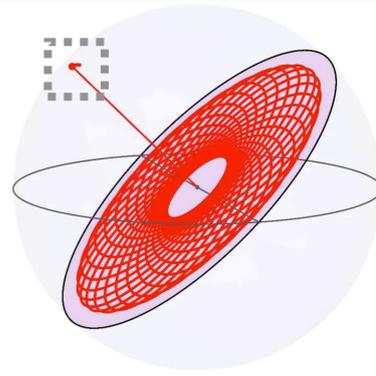
●  
Etoile  
**moins** massive

●  
Etoile  
**plus** massive



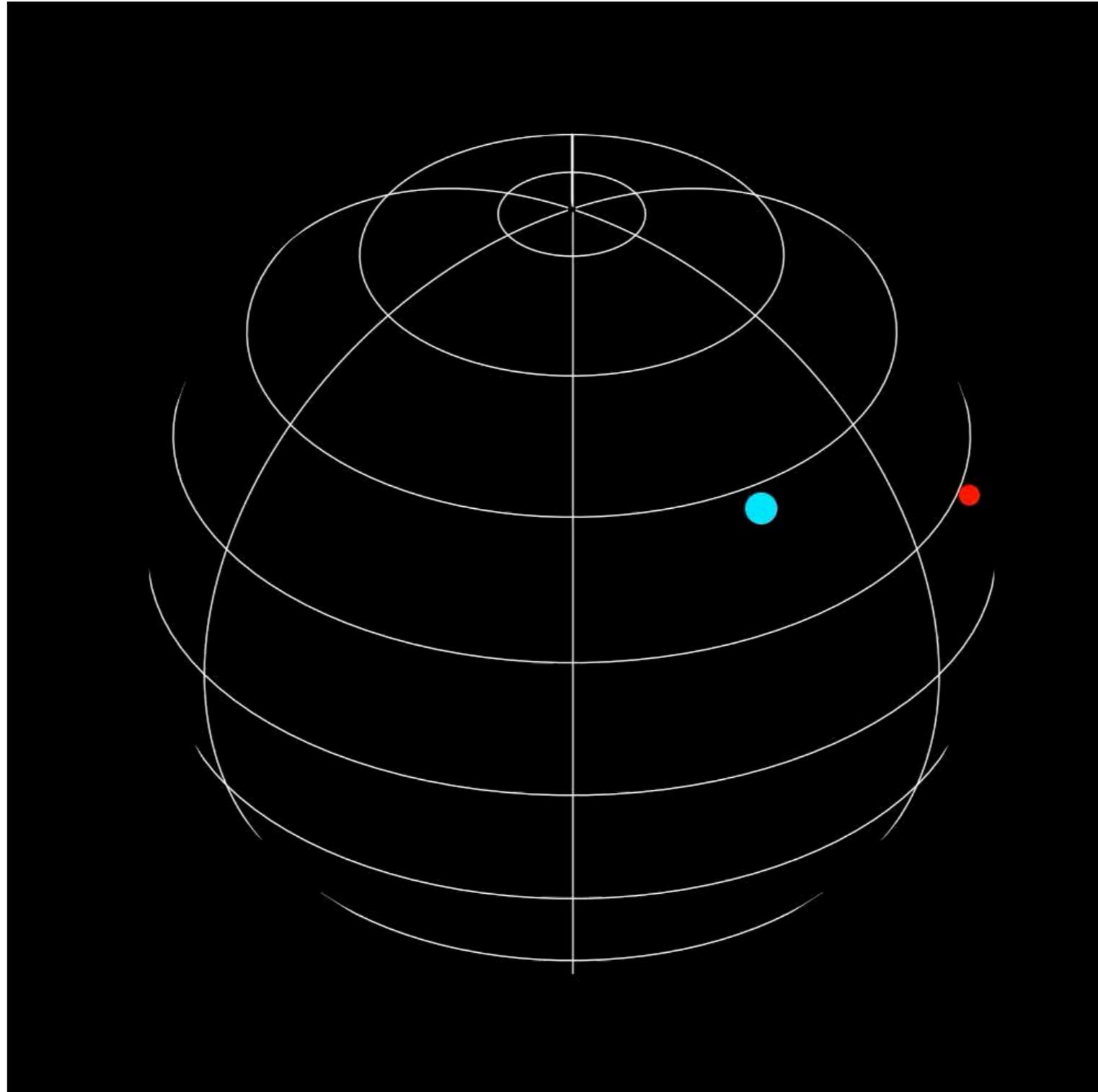
Et pour des masses différentes ?

# Problème à deux corps (le plus que vrai)



●  
Etoile  
**moins** massive

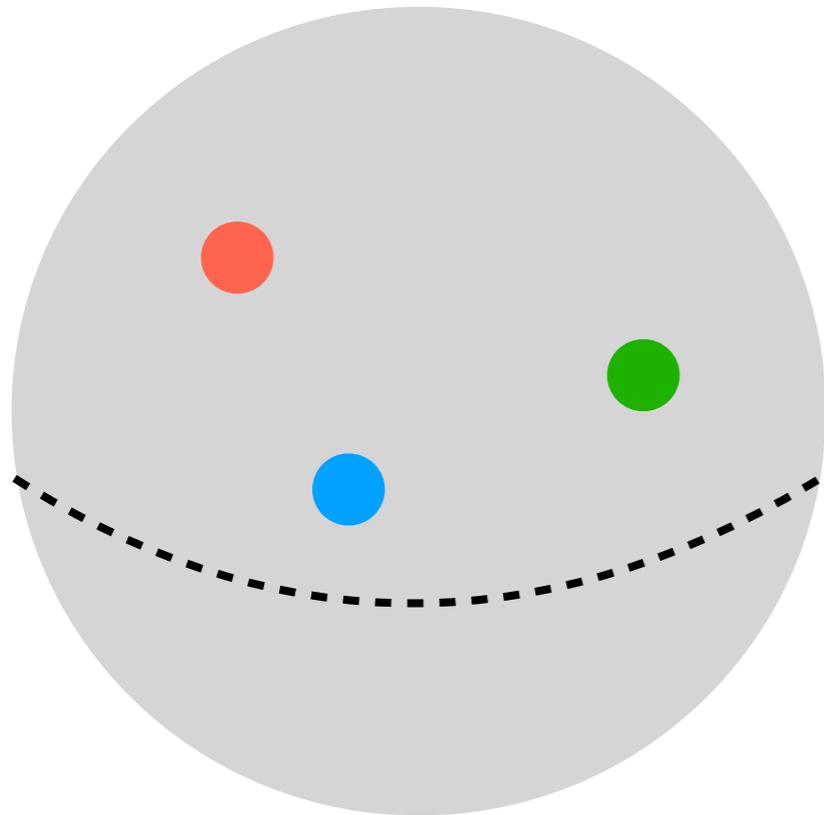
●  
Etoile  
**plus** massive



Les étoiles tournent autour de leur ``**centre de masse**``

# Simulation numérique

Dynamique temporelle

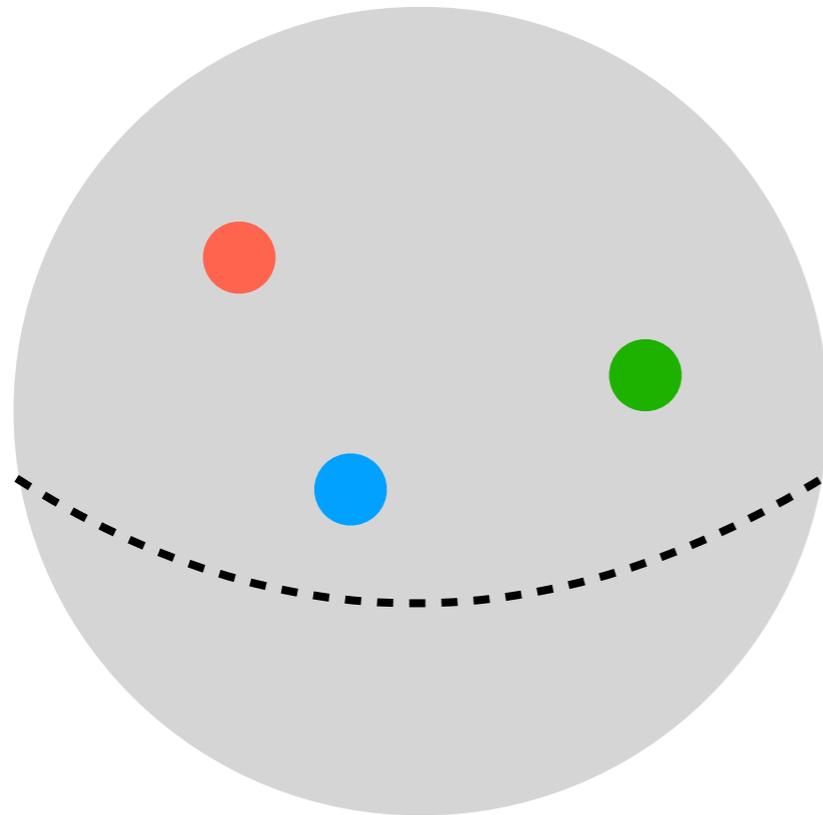


Temps initial  
 $t = 0$

Comment faire **avancer dans le temps** ?

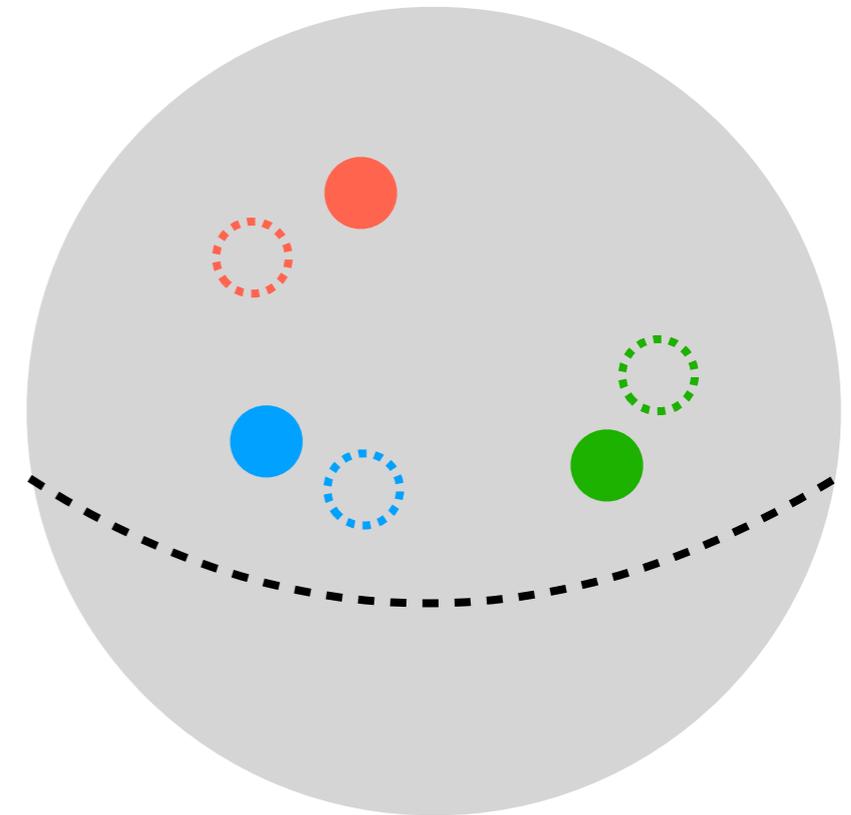
# Simulation numérique

Dynamique temporelle



Temps initial  
 $t = 0$

Intégrateur  
numérique



Temps suivant  
 $t = \Delta t$

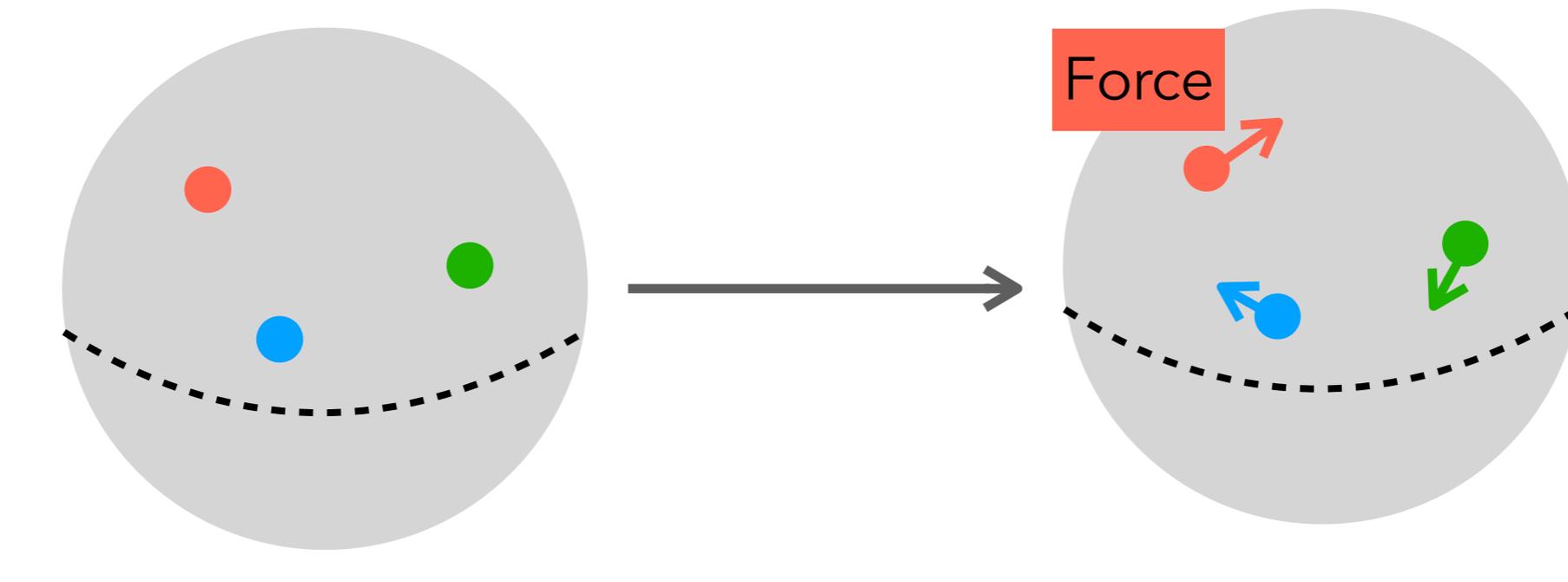
Pas de temps

Comment faire **avancer dans le temps** ?

# Simulation numérique

Deux étapes

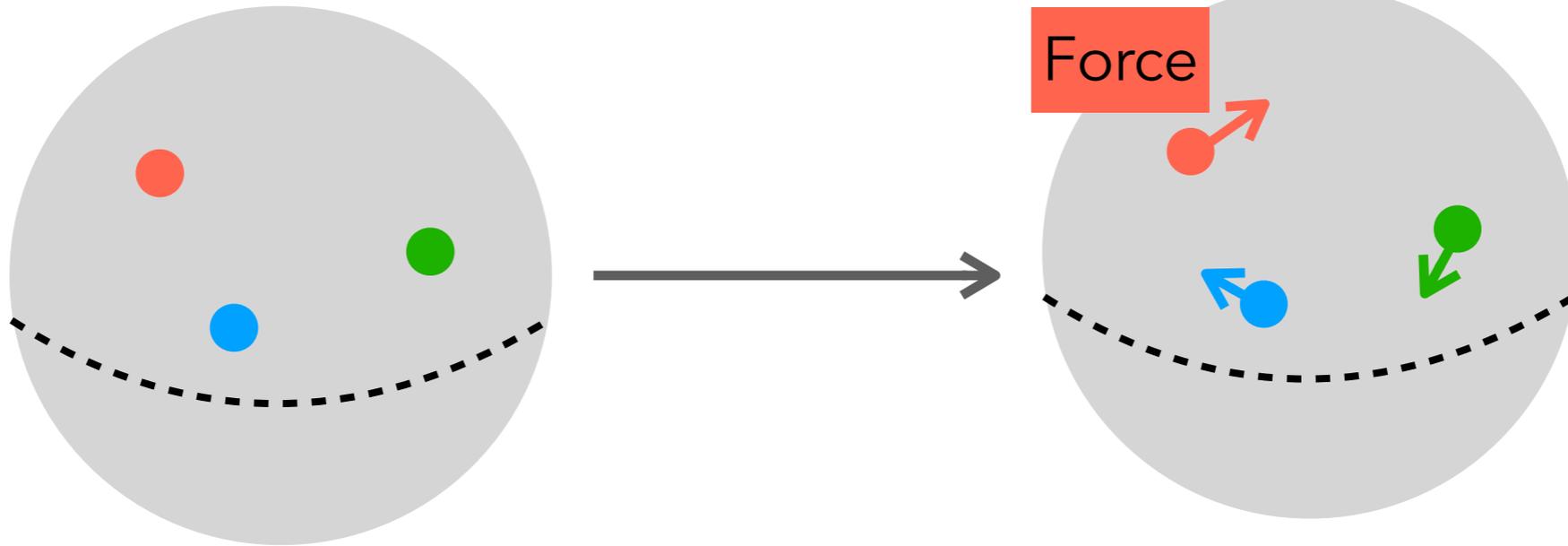
1. Calculer les **forces**



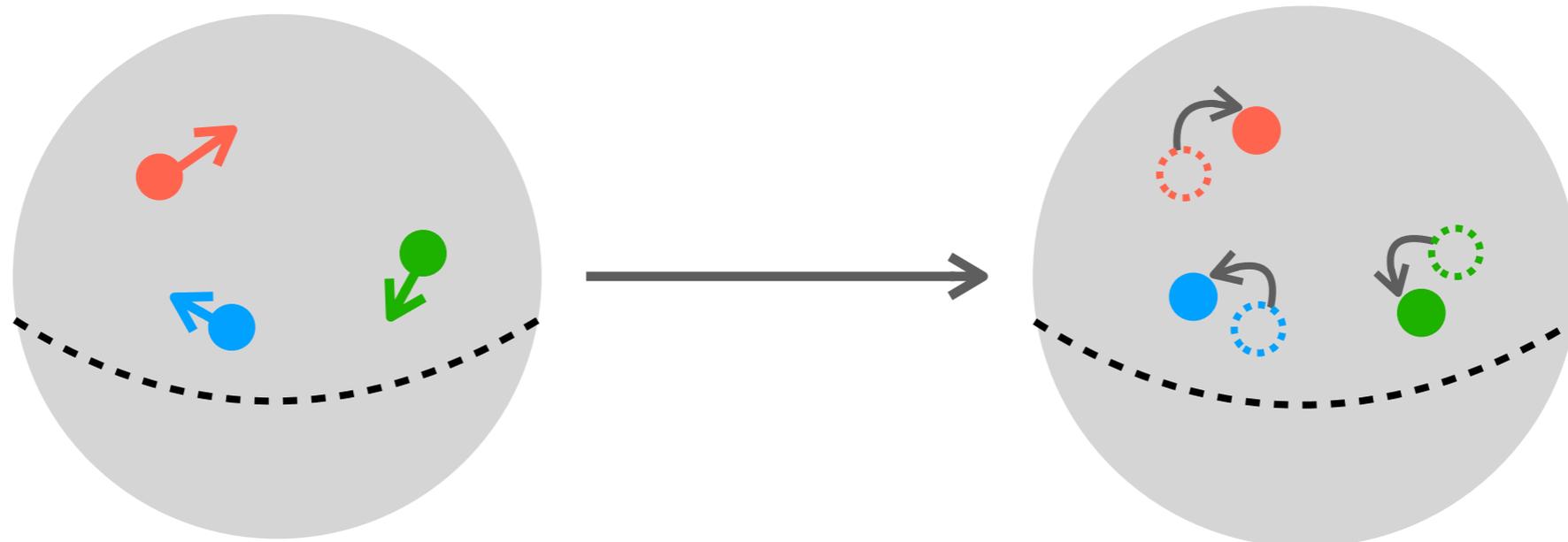
# Simulation numérique

Deux étapes

1. Calculer les **forces**



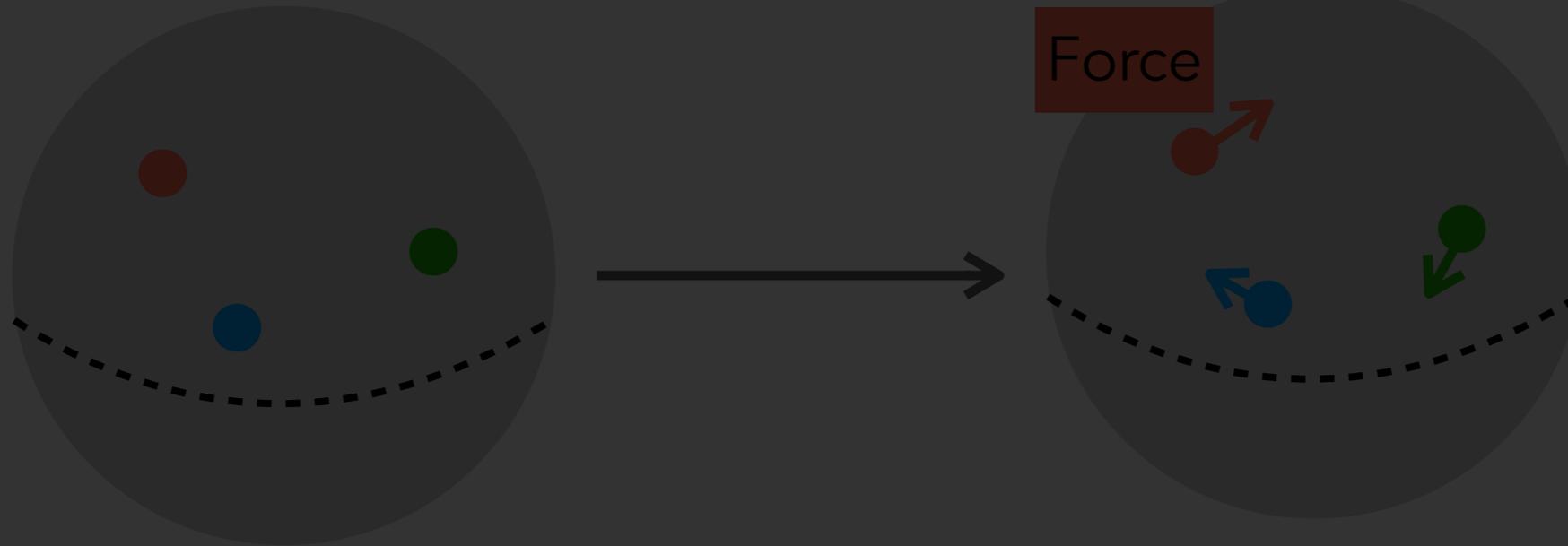
2. **Avancer** les étoiles



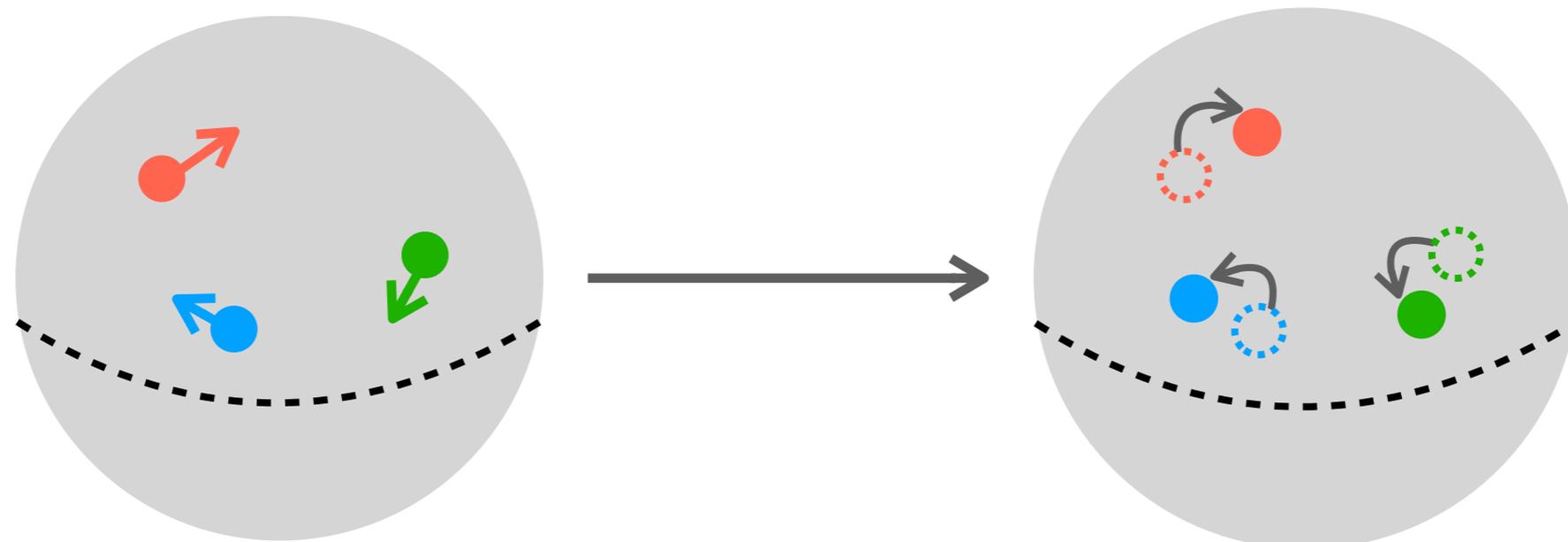
# Simulation numérique

Deux étapes

1. Calculer les forces

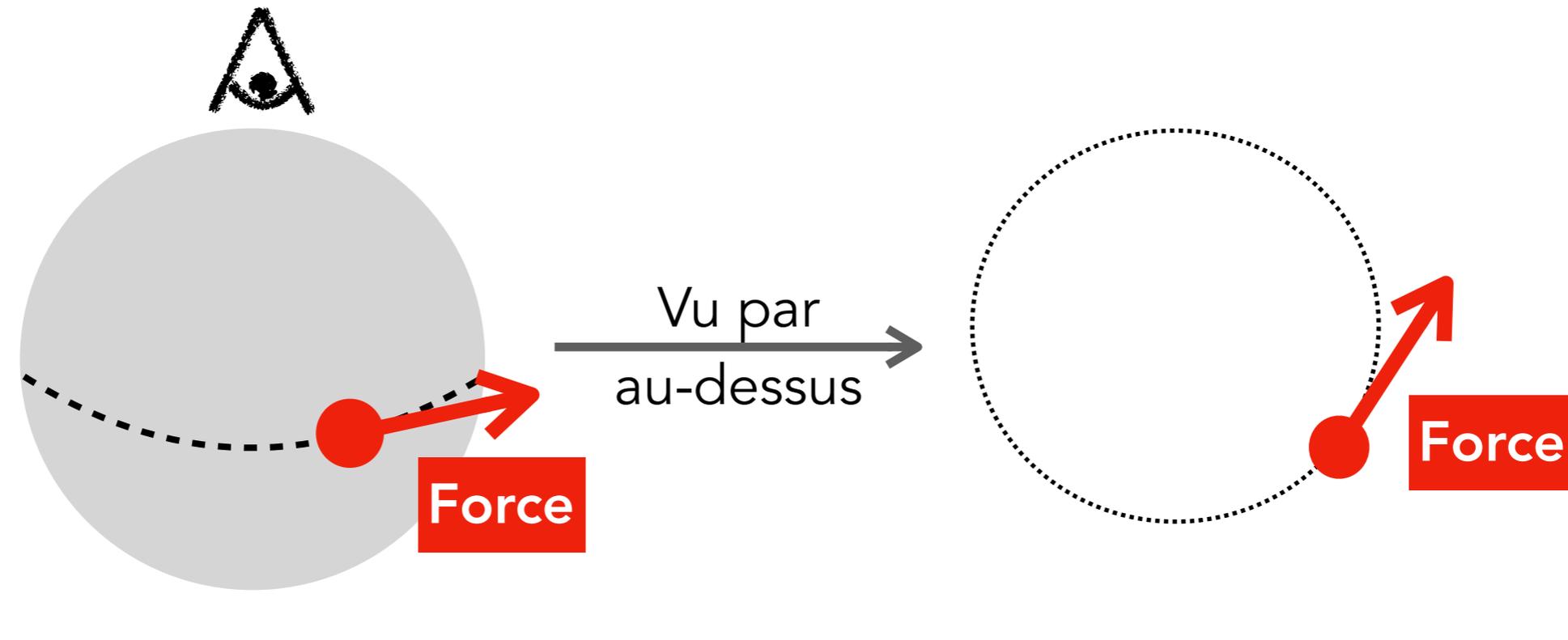


2. Avancer les étoiles



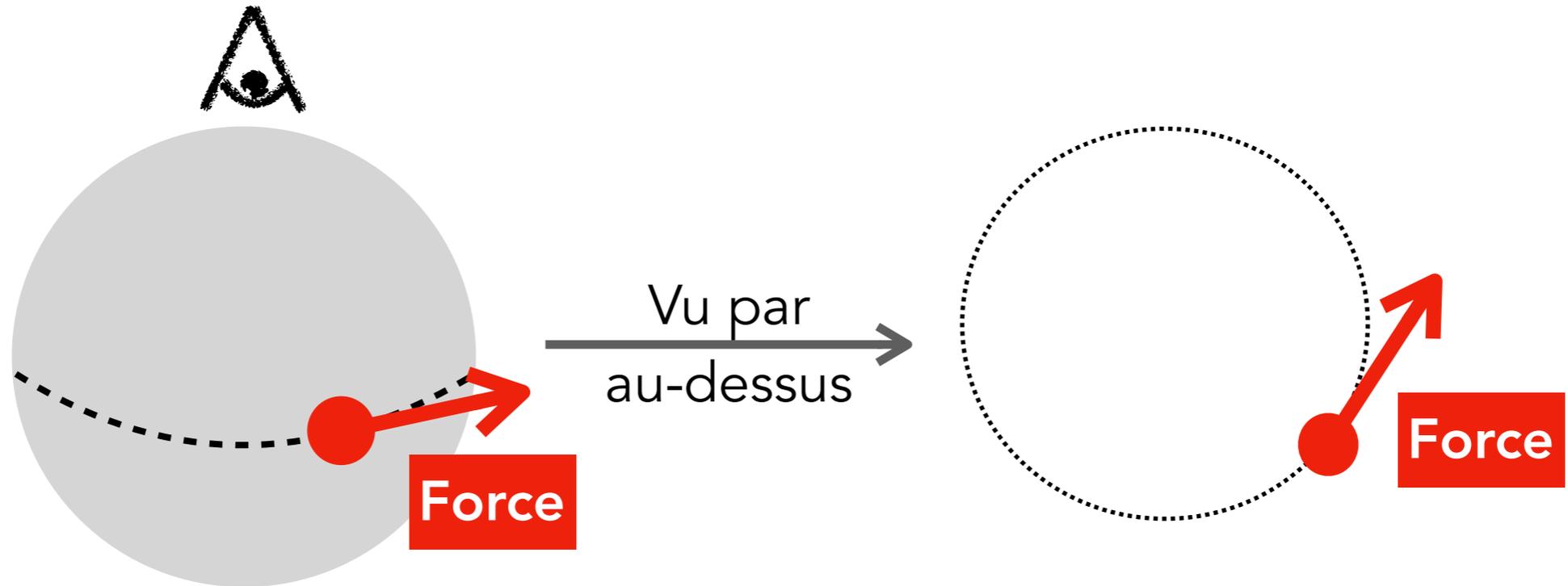
# Intégration en temps

Force sur une étoile

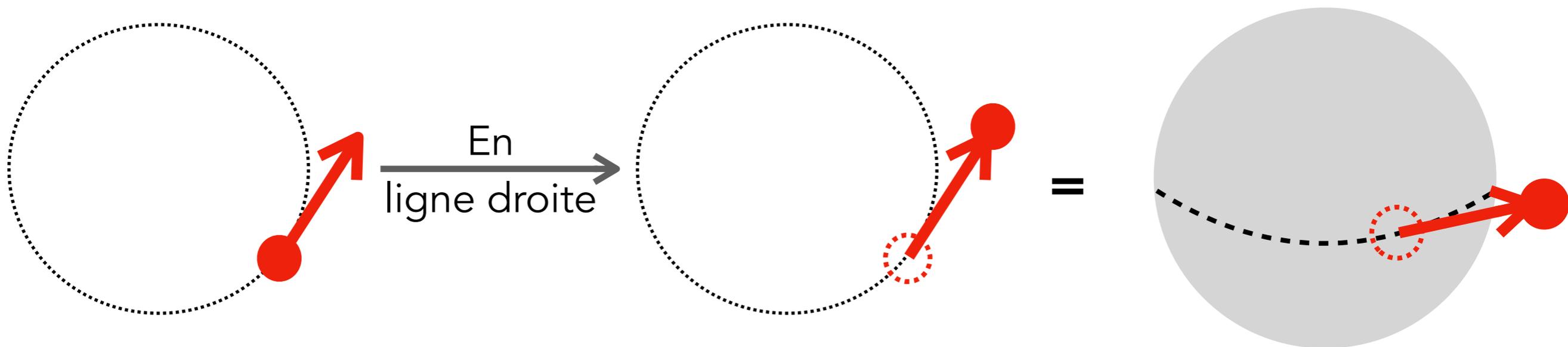


# Intégration classique

Force sur une étoile



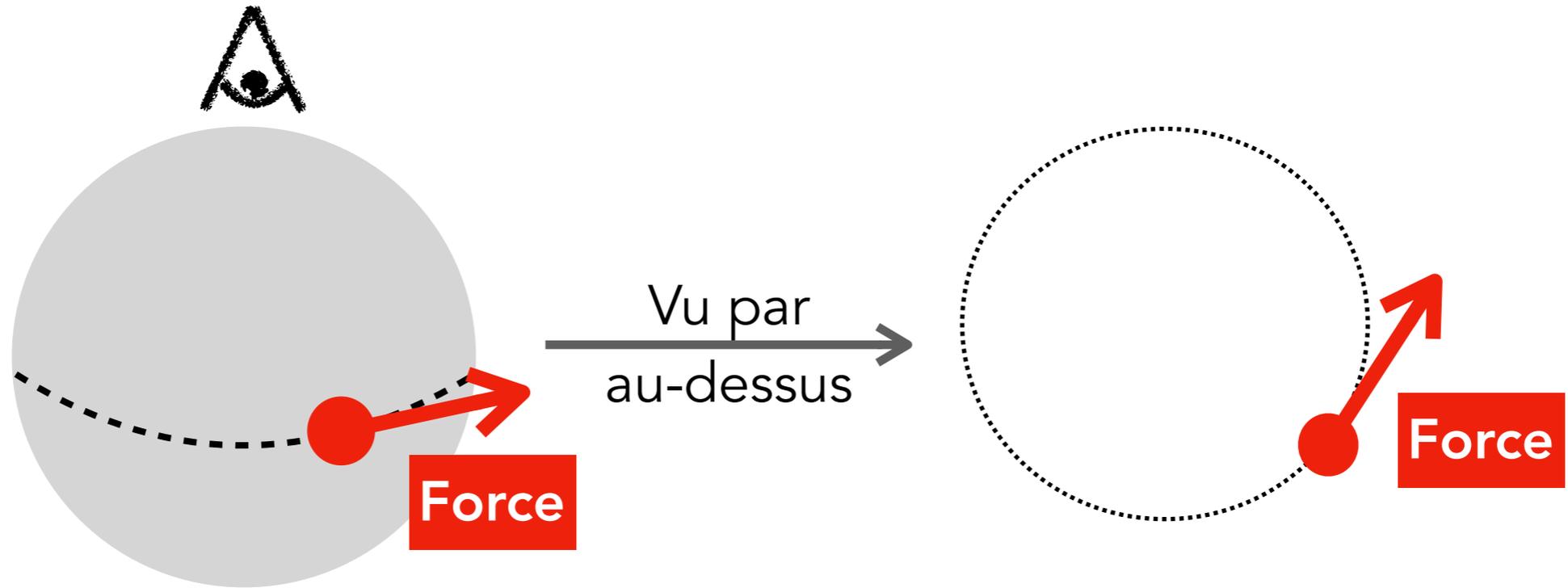
Avancer une étoile



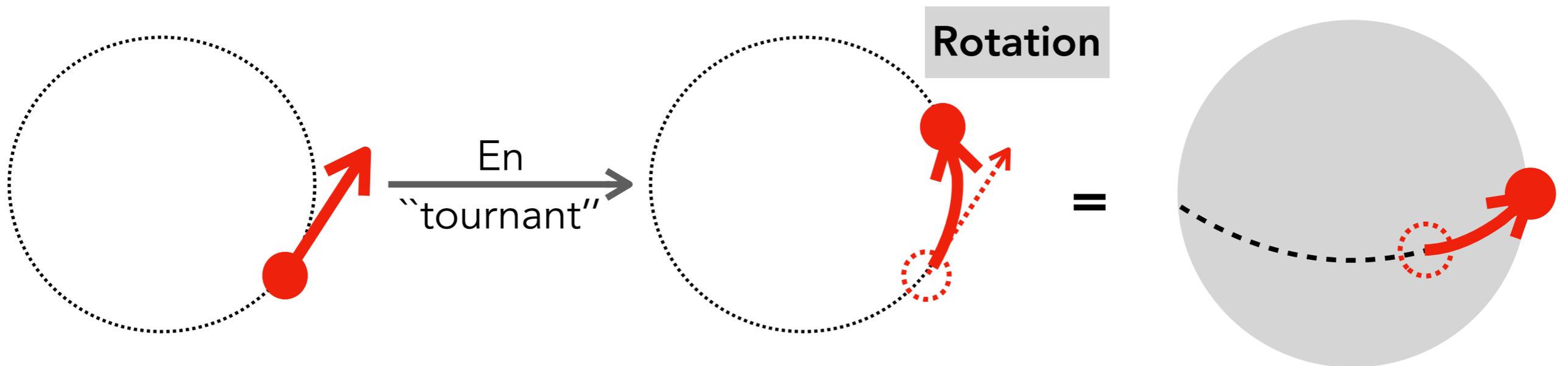
Les étoiles quittent la sphère unité. Pas glop

# Intégration classique

Force sur une étoile



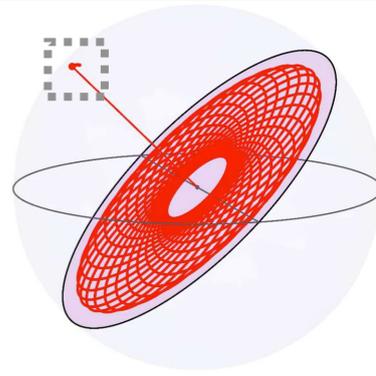
Avancer une étoile



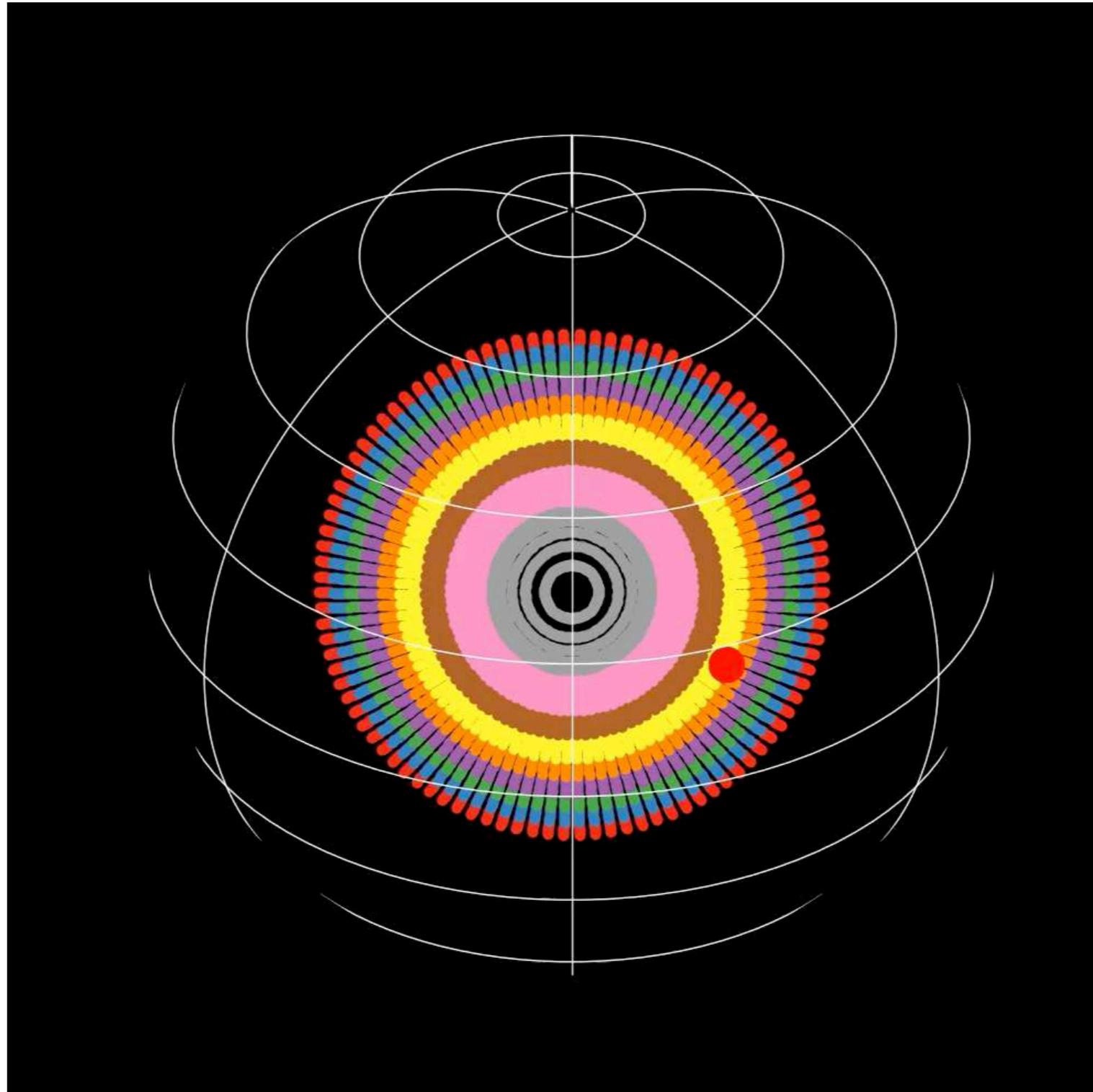
Les étoiles restent la sphère unité

# Rotations sur la sphère

Les étoiles évoluent sur la **sphère**



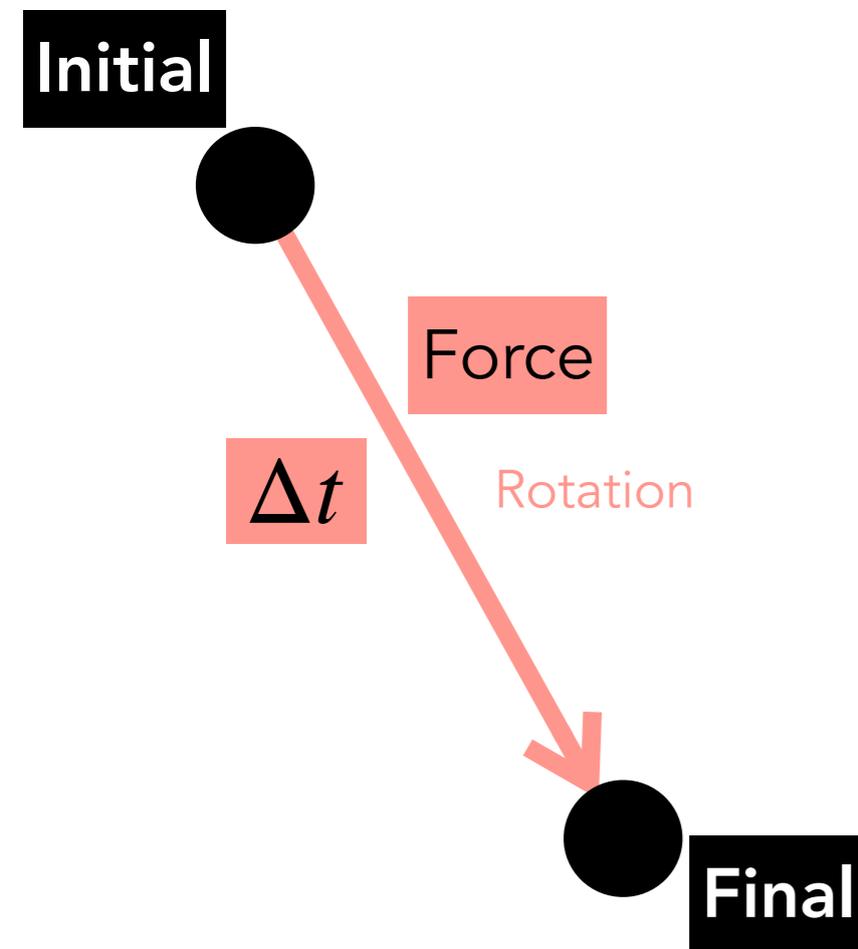
Axe de **rotation**



Avancer, c'est **tourner** !

# Intégration en temps – 101

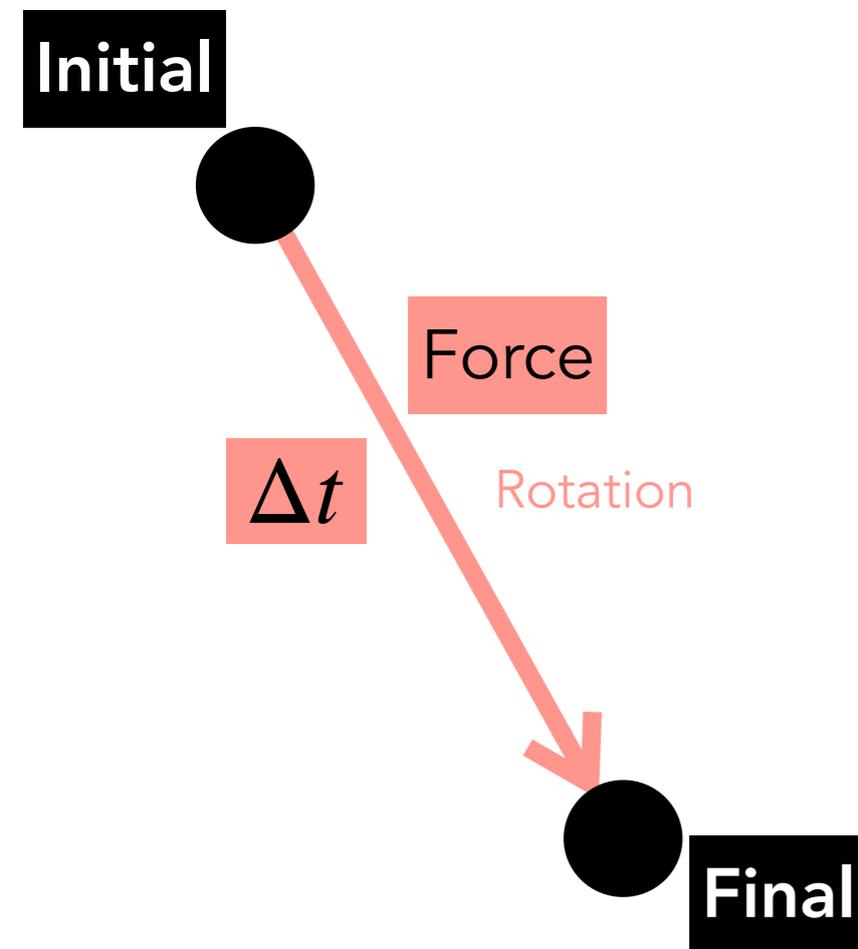
Schéma d'ordre 1



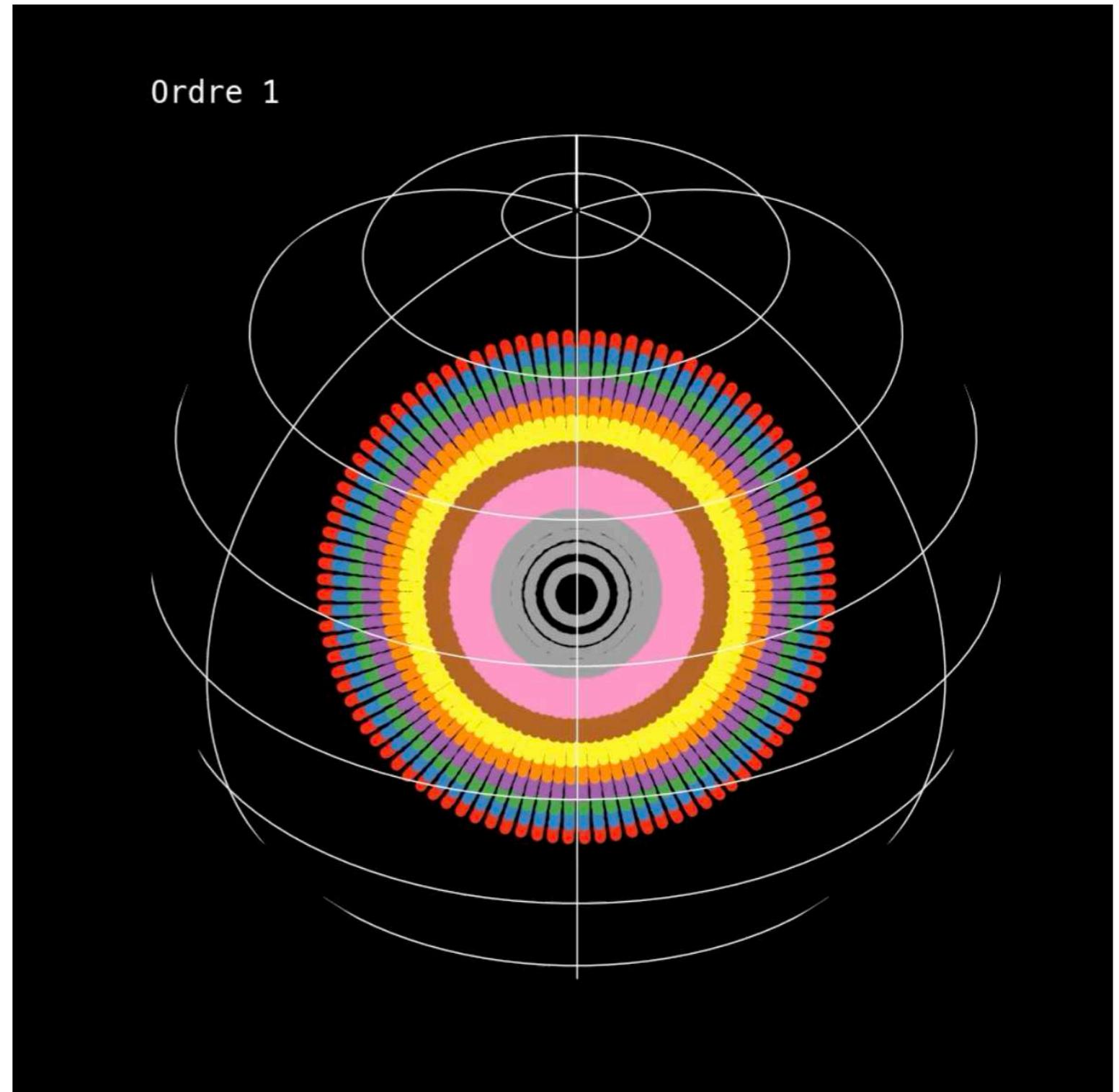
1 évaluation de force  
par pas de temps

# Intégration en temps – 101

Schéma d'ordre 1



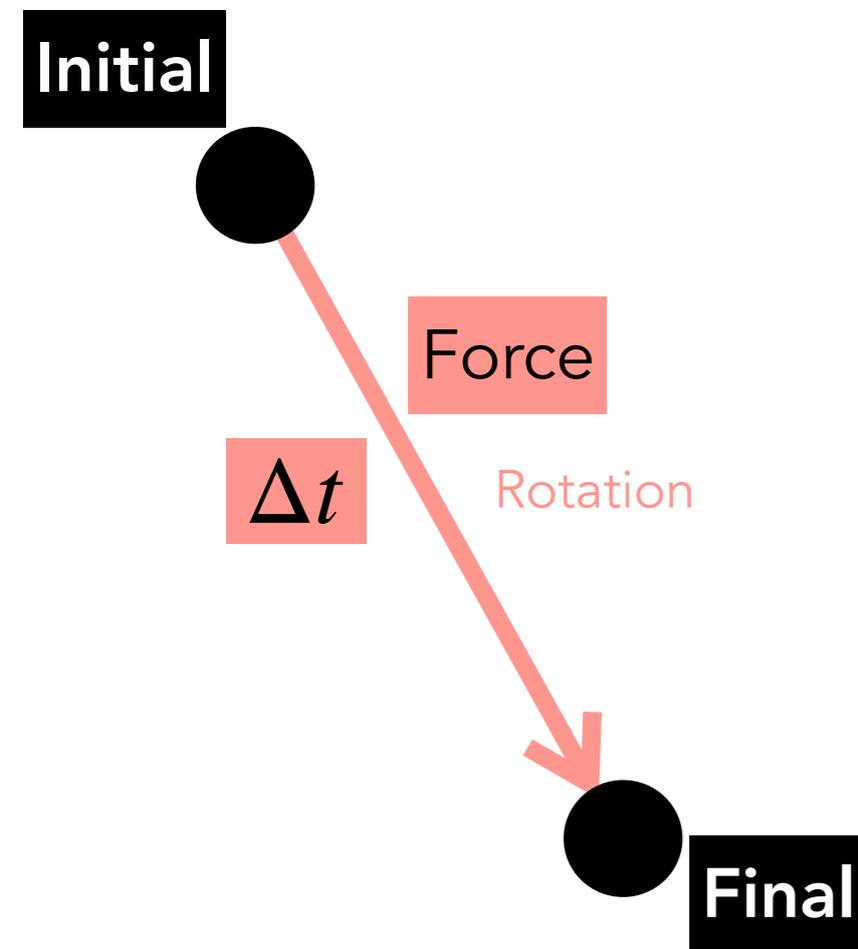
1 évaluation de force  
par pas de temps



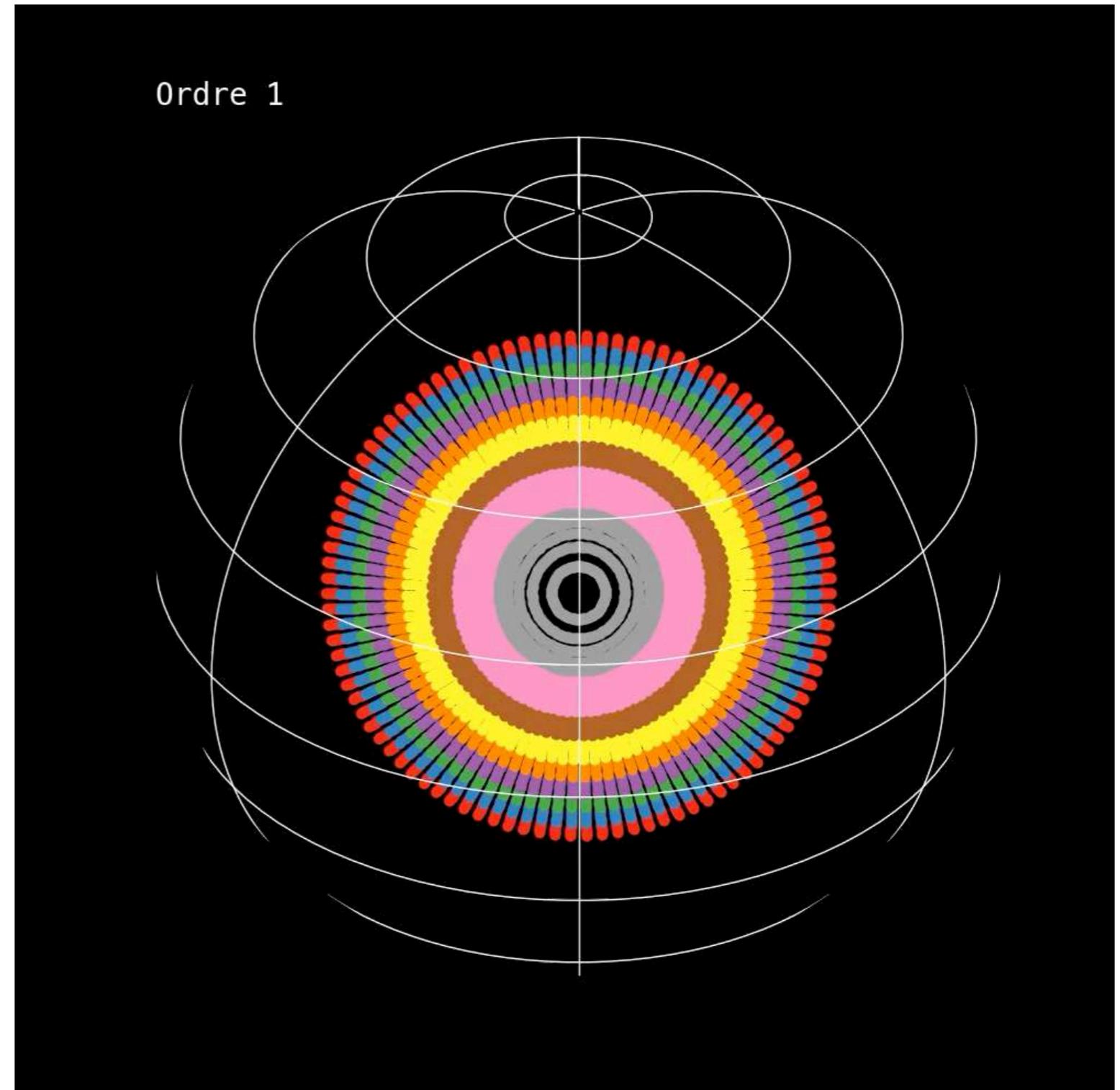
Conditions initiales

# Intégration en temps – 101

Schéma d'ordre 1



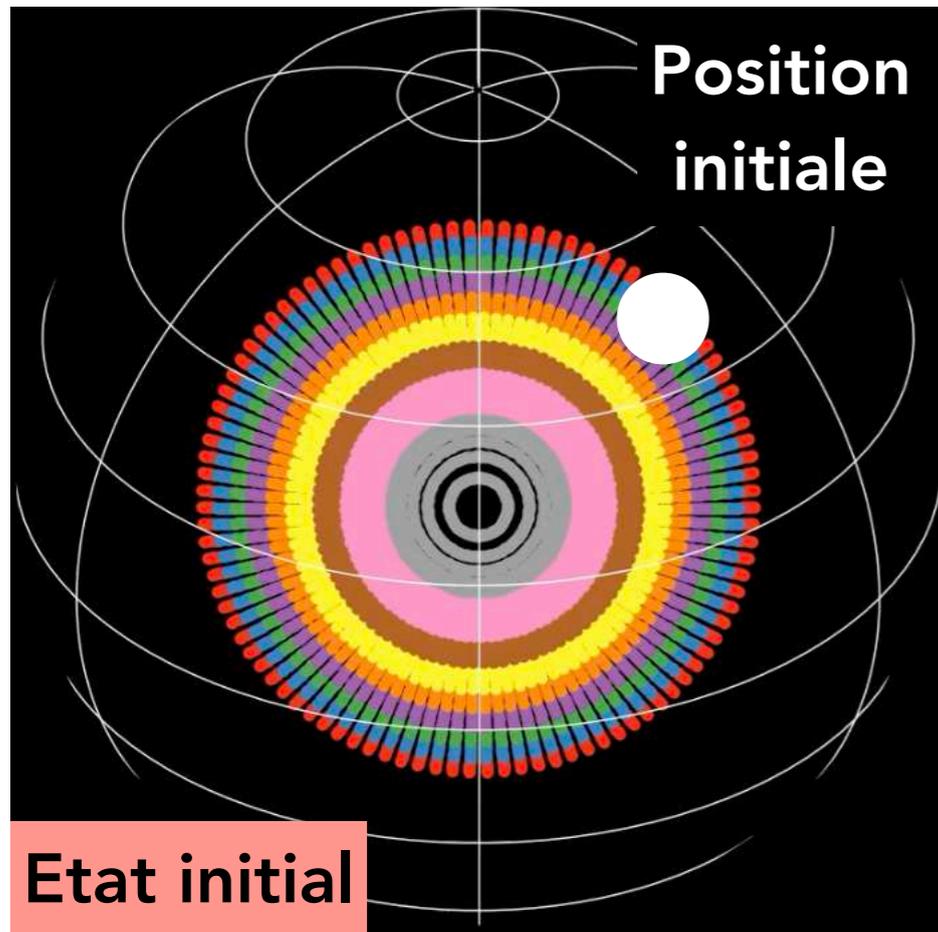
1 évaluation de force  
par pas de temps



Les étoiles **diffusent** sur la sphère

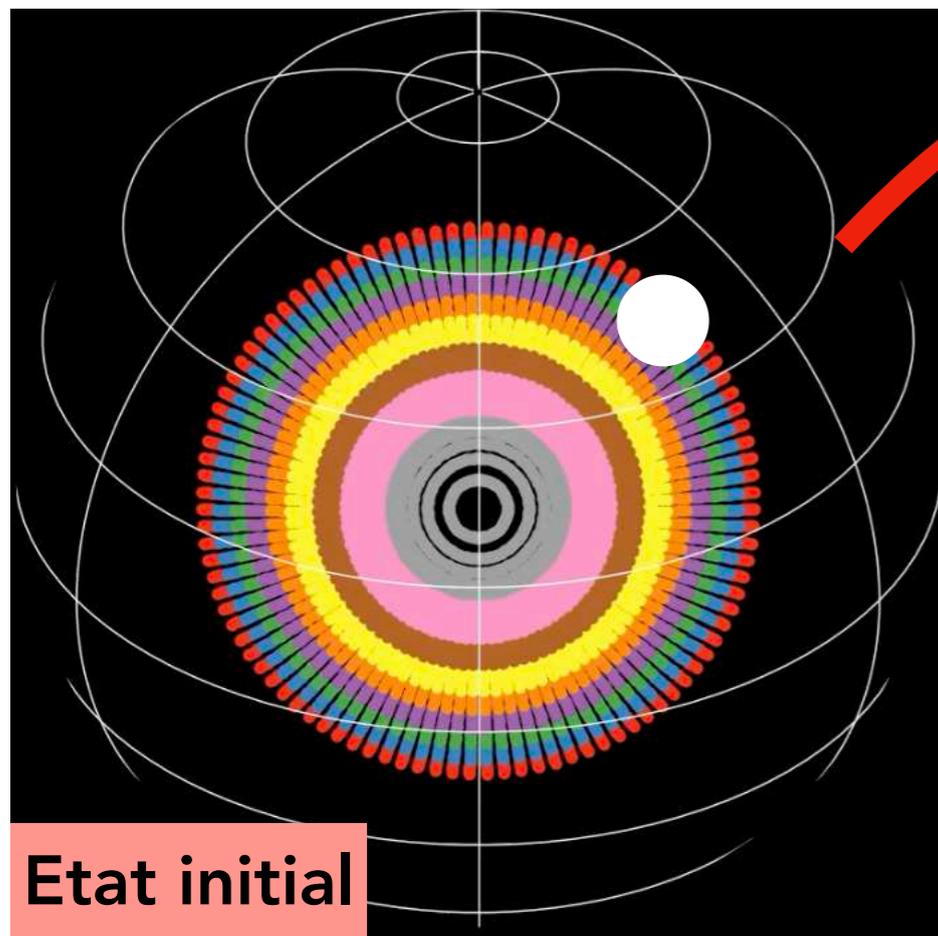
## Revenir sur ses pas

Dynamique à N-corps **exactement réversible**

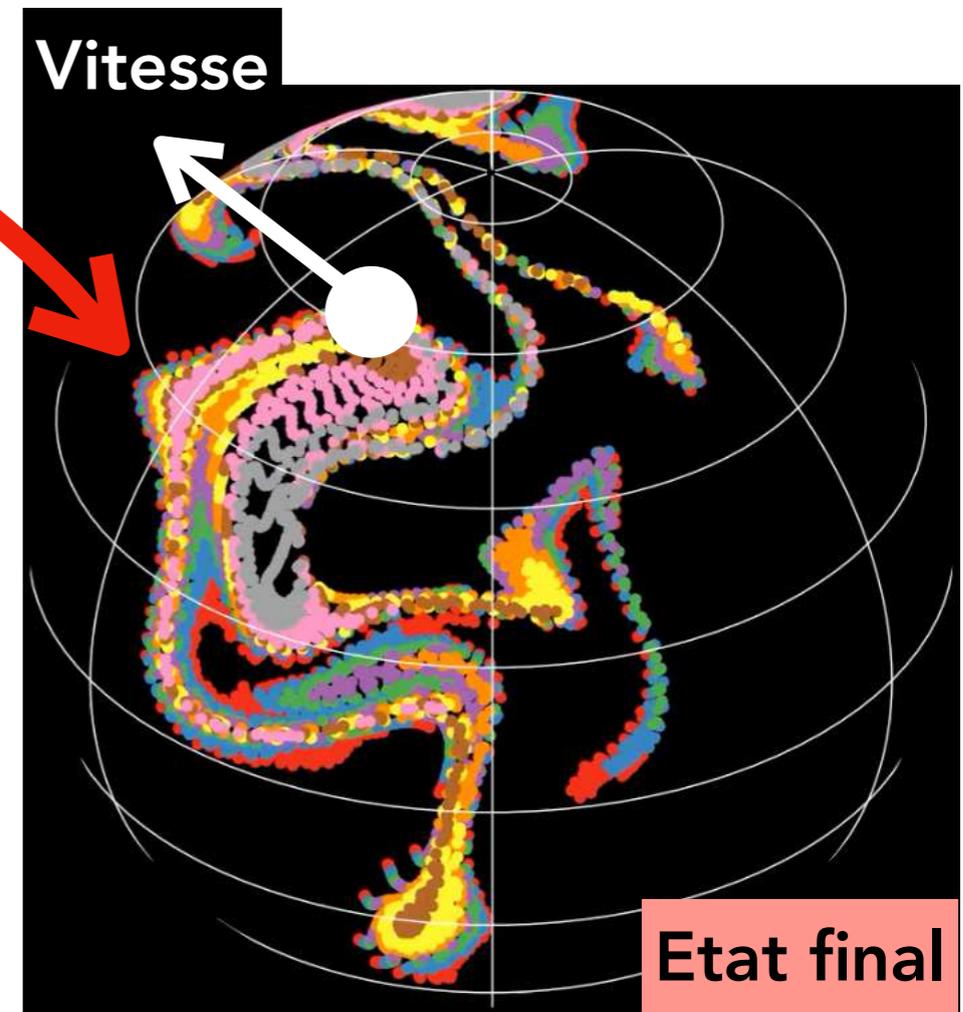


## Revenir sur ses pas

Dynamique à N-corps **exactement réversible**

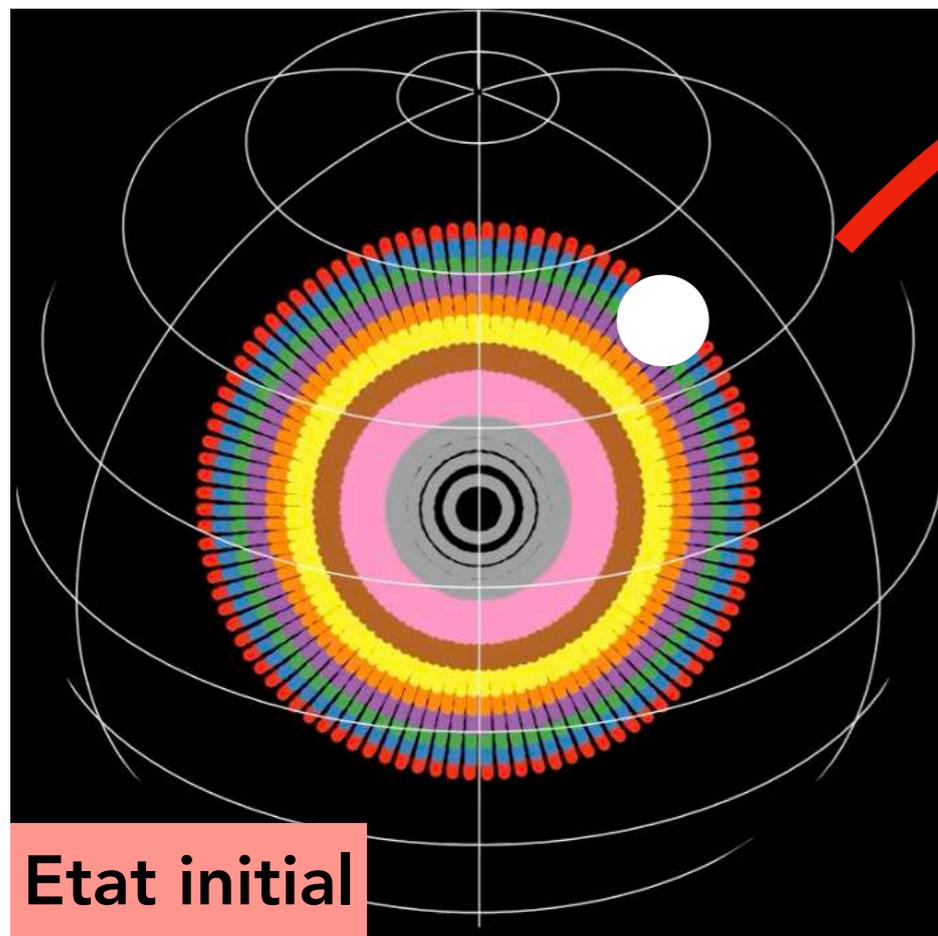


Intégration  
numérique

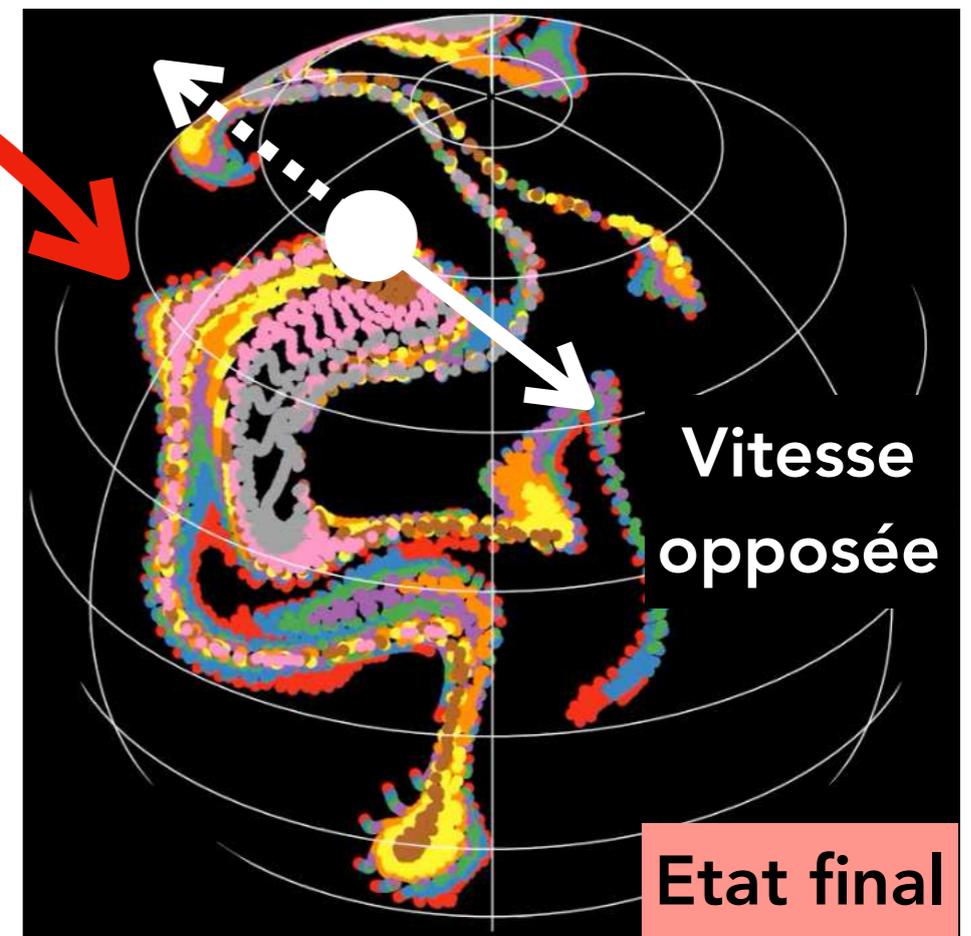


## Revenir sur ses pas

Dynamique à N-corps **exactement réversible**

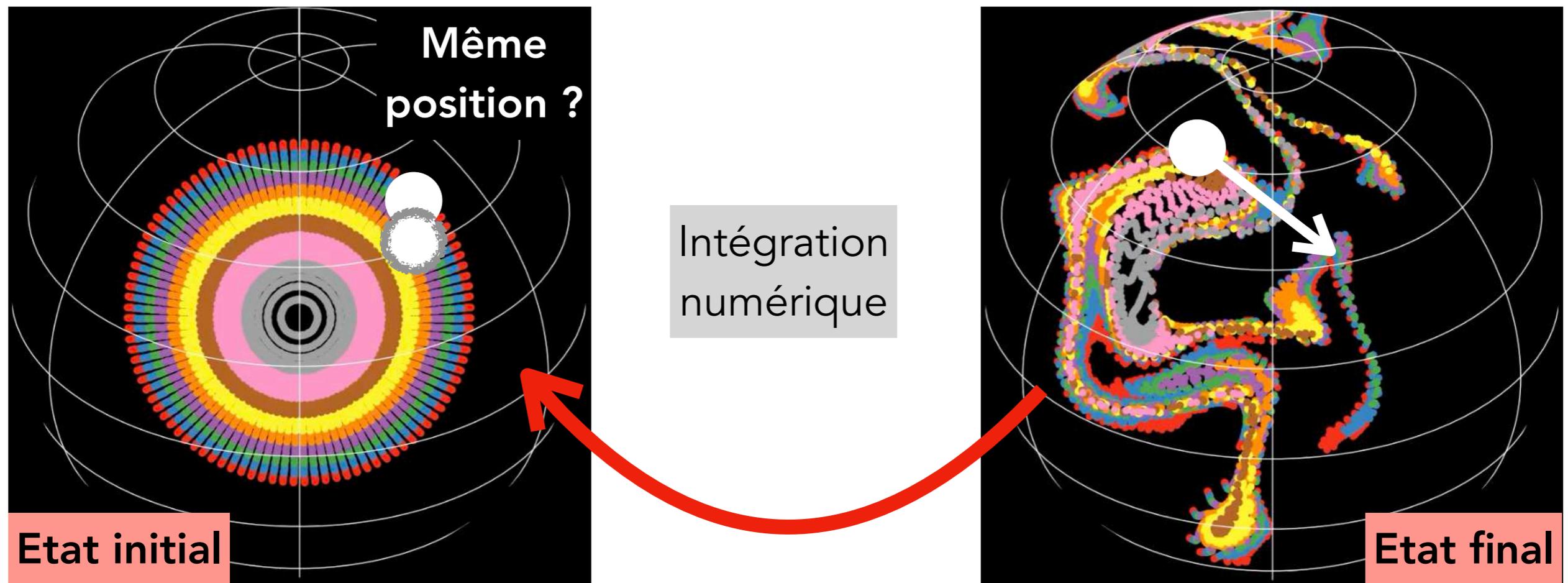


Intégration  
numérique



## Revenir sur ses pas

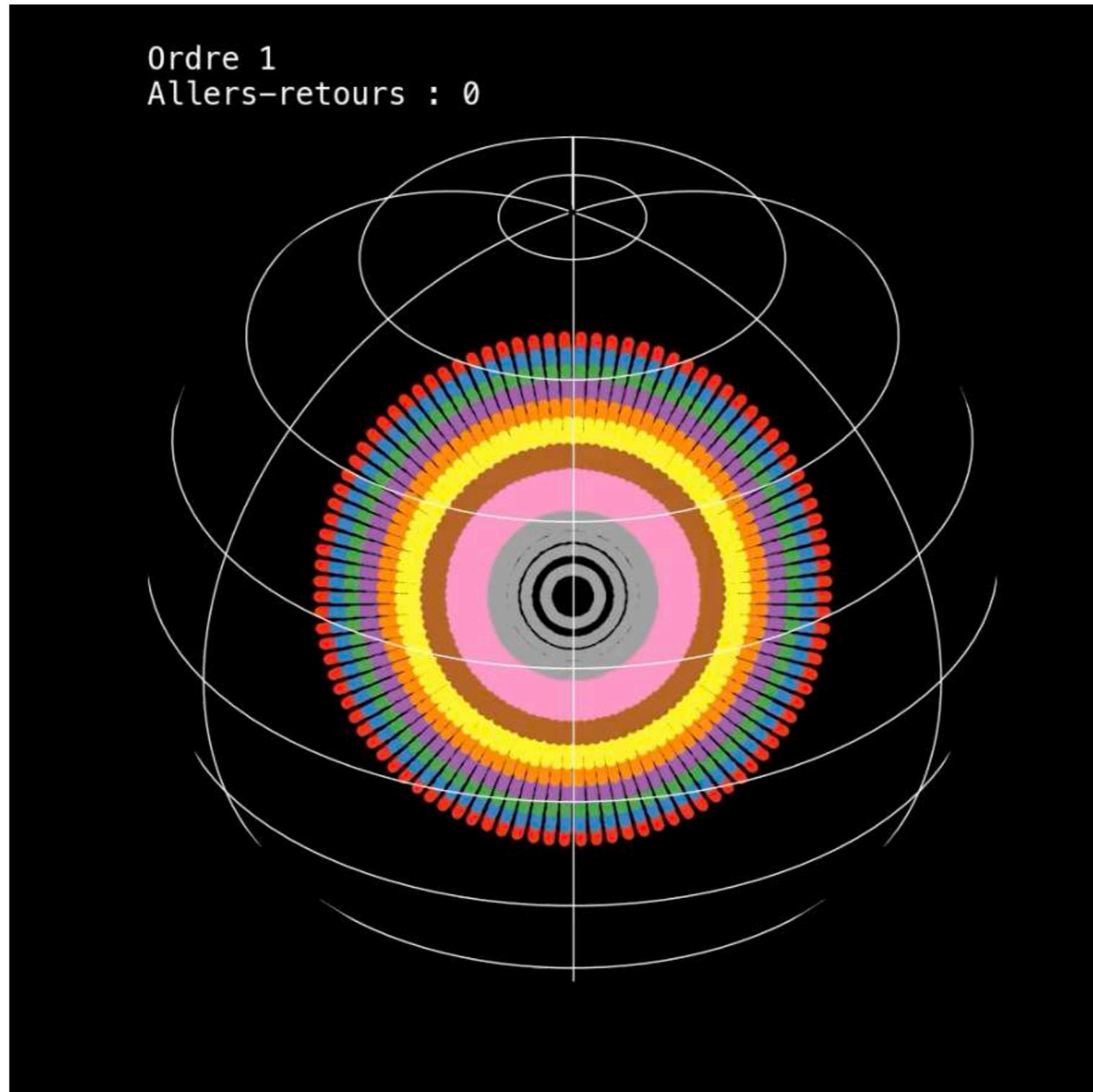
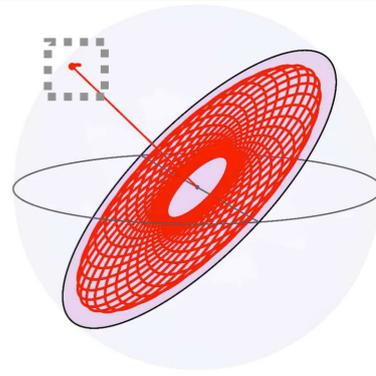
Dynamique à N-corps **exactement réversible**



Les simulations sont-elles **réversibles** ?

# (Ir)réversibilité en temps

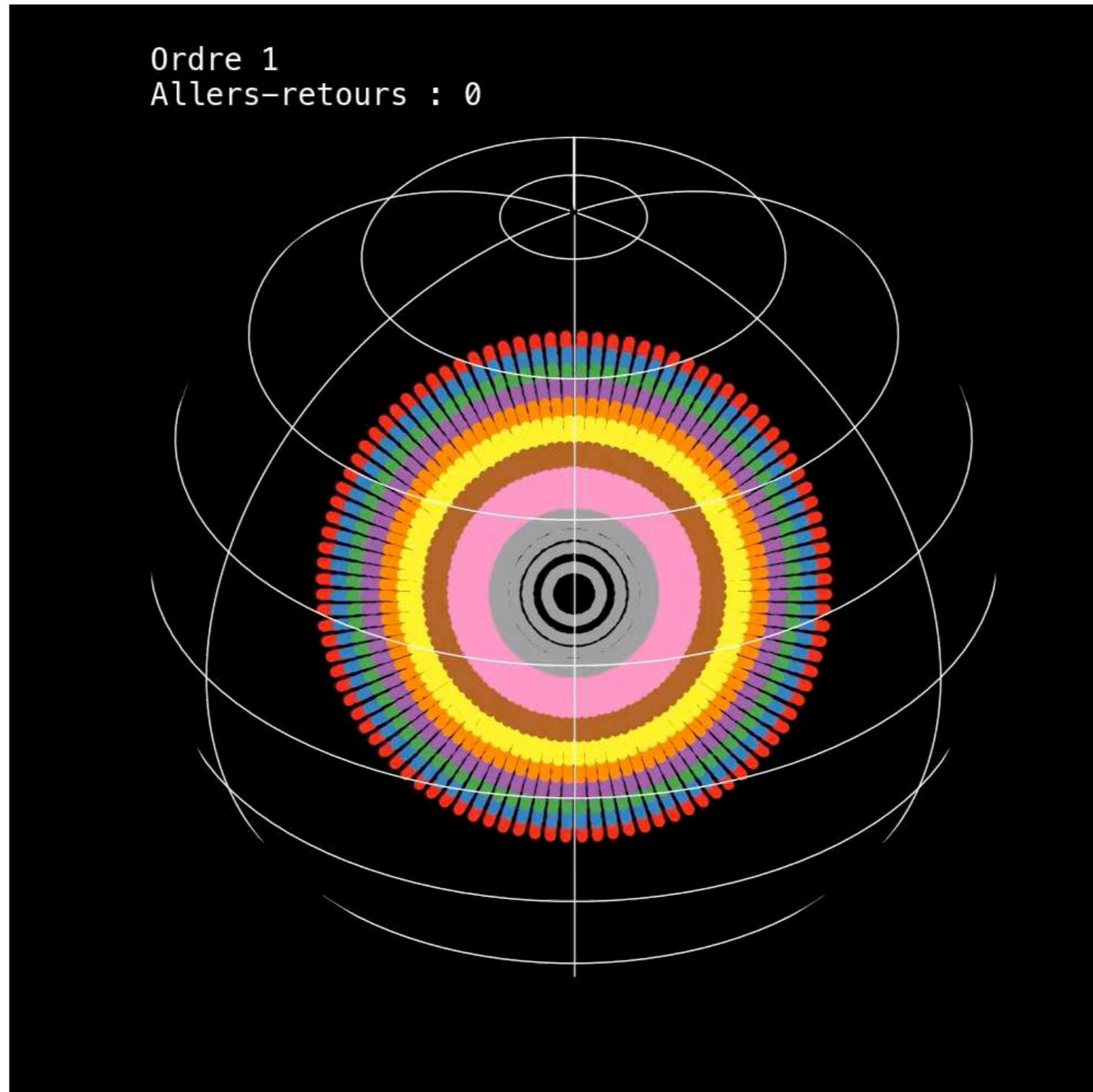
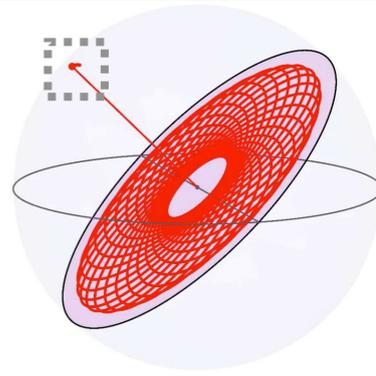
Enchaînons des séries d'allers-retours



Retrouve-t-on les **positions initiales** ?

# (Ir)réversibilité en temps

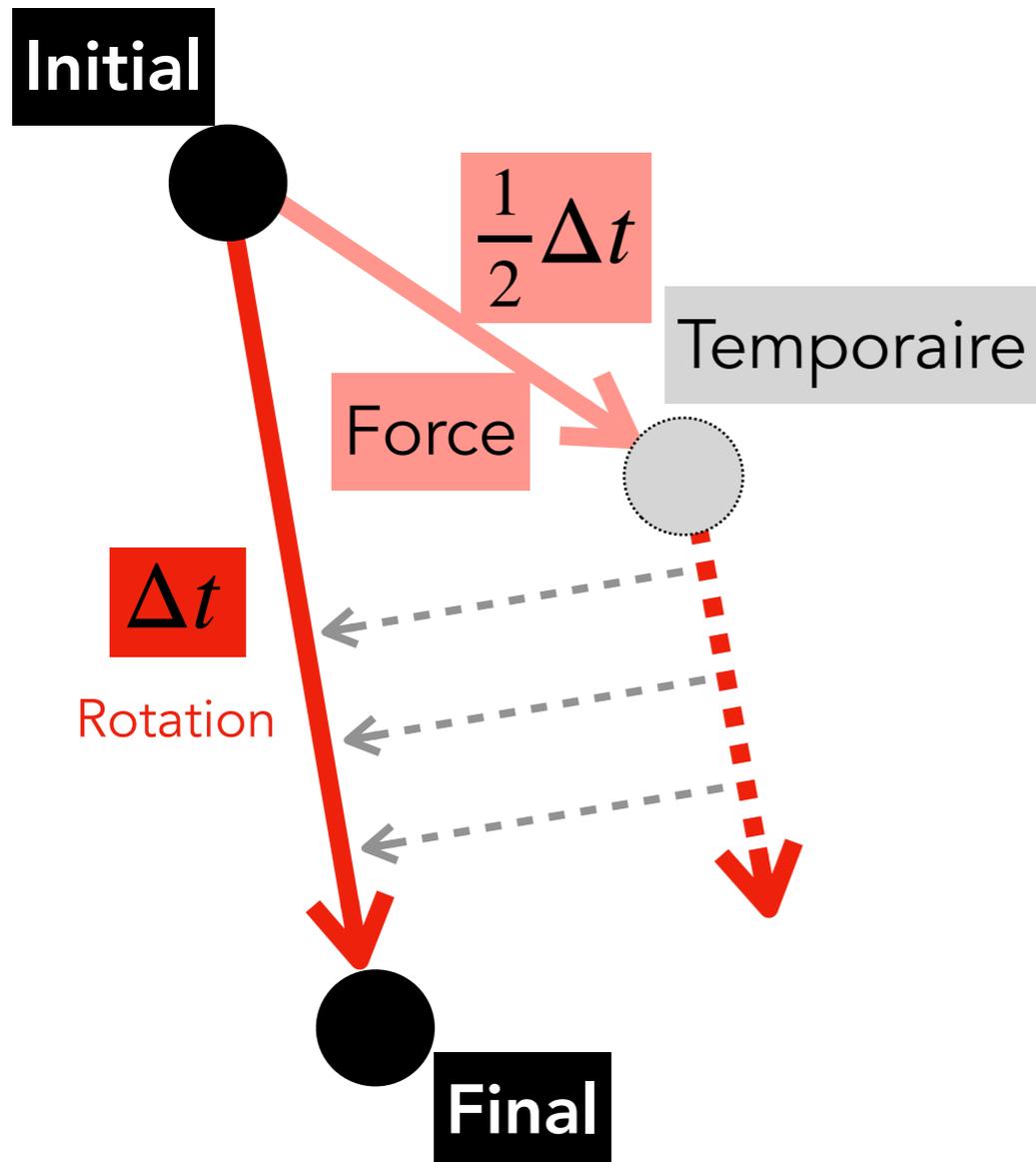
Après un **aller-retour**, les positions initiales diffèrent



Comment intégrer plus **précisément** ?

# Intégration d'ordre deux

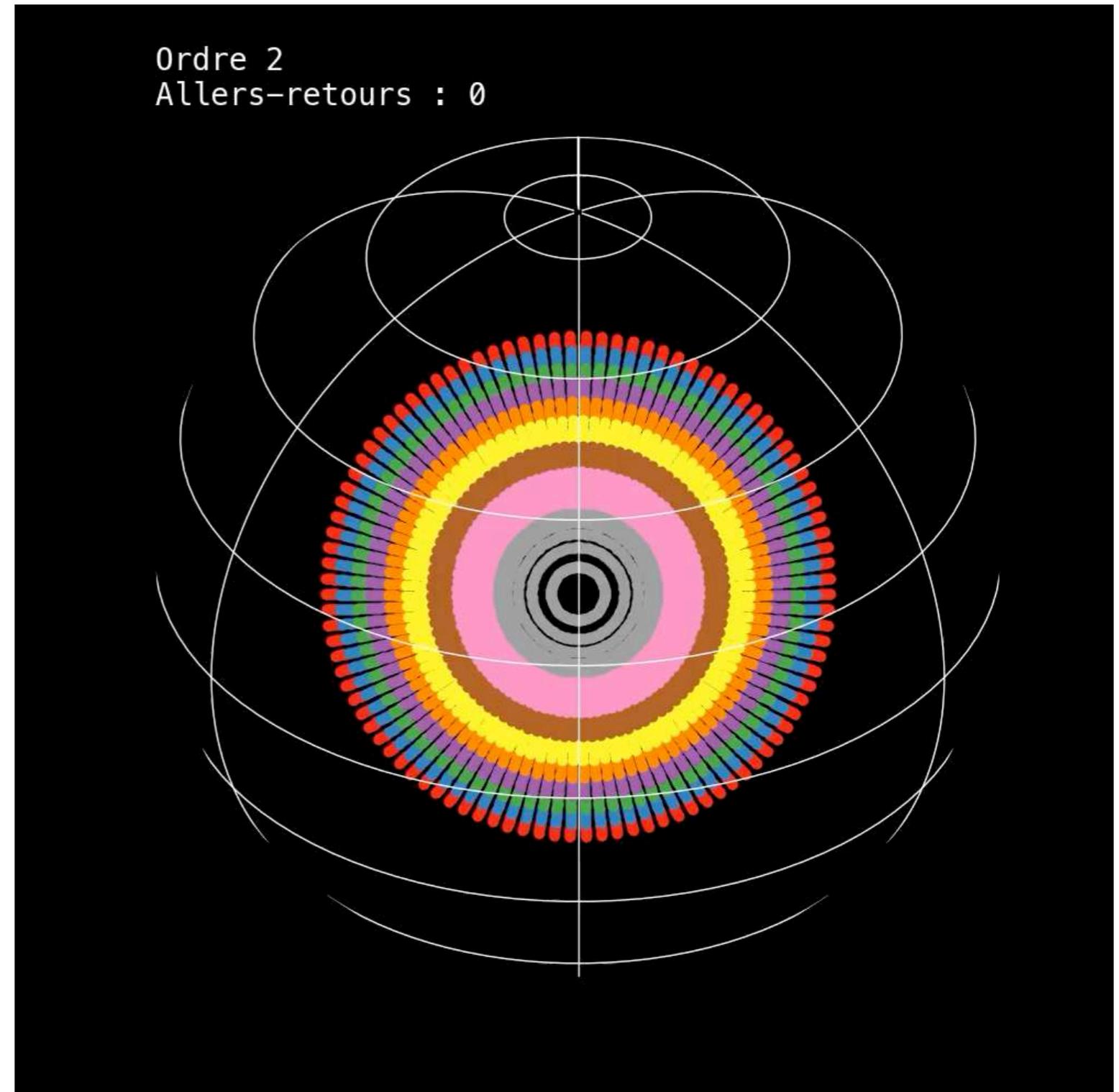
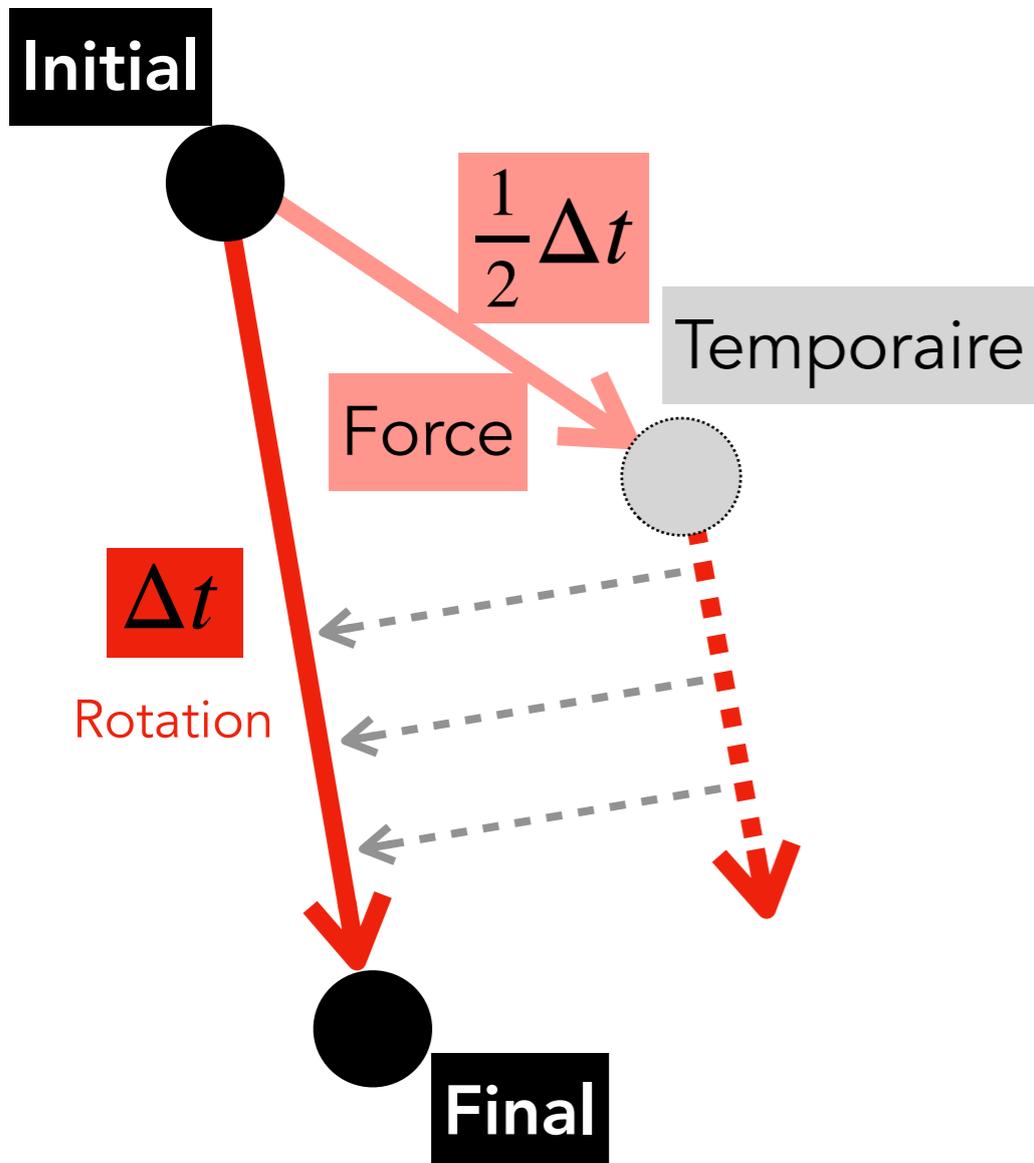
## Schéma d'ordre 2



Deux évaluations de force  
par pas de temps

# Intégration d'ordre deux

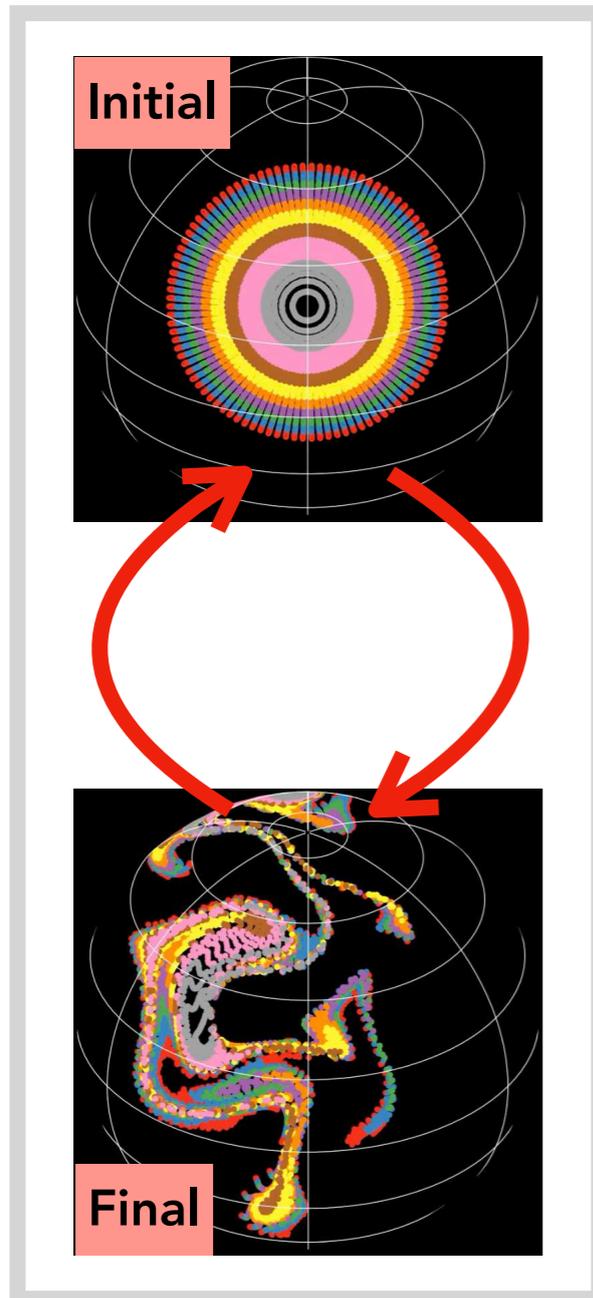
## Schéma d'ordre 2



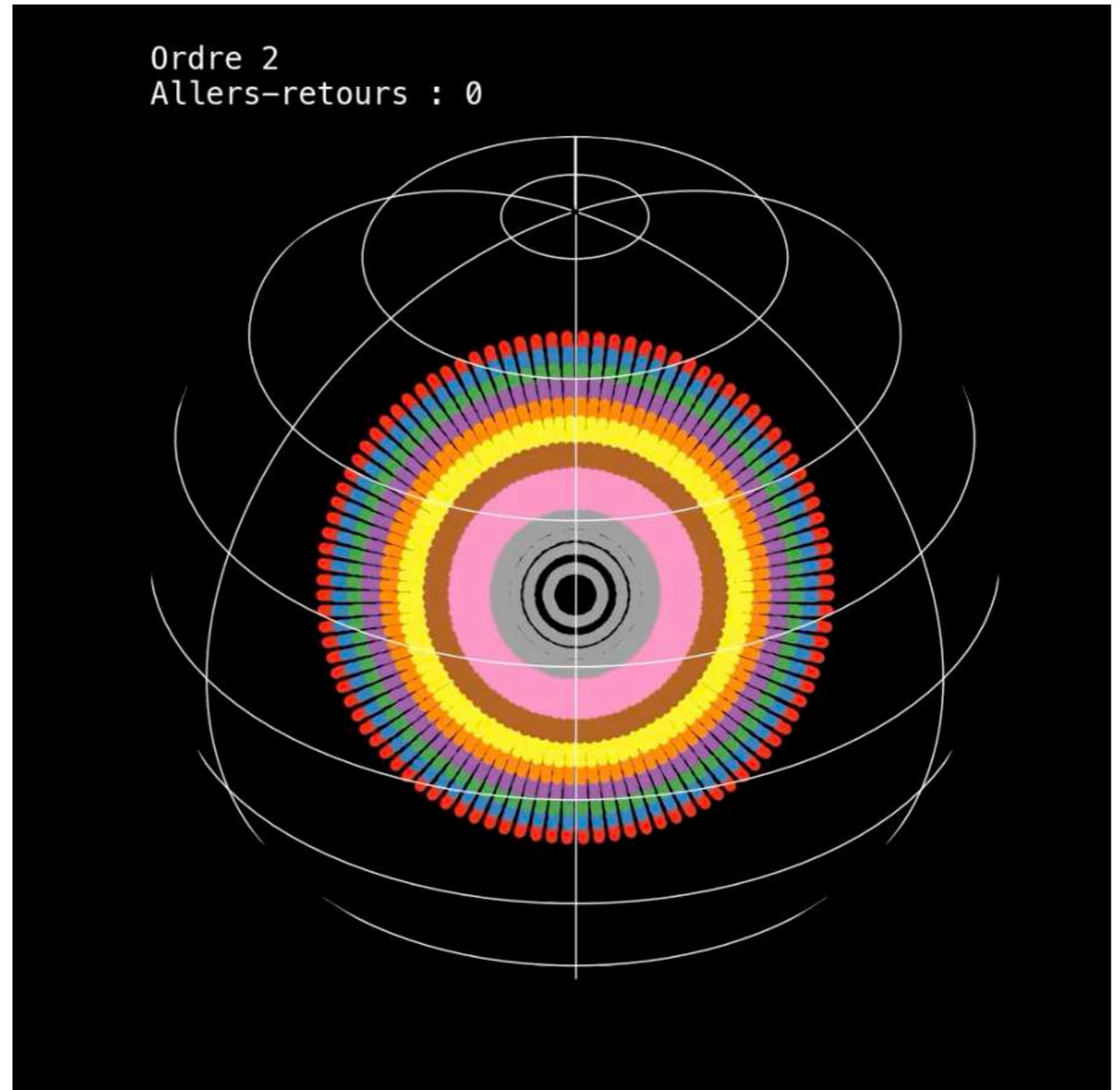
C'est beaucoup mieux, mais pas parfait...

# Affaire de répétition

On répète les **allers-retours**



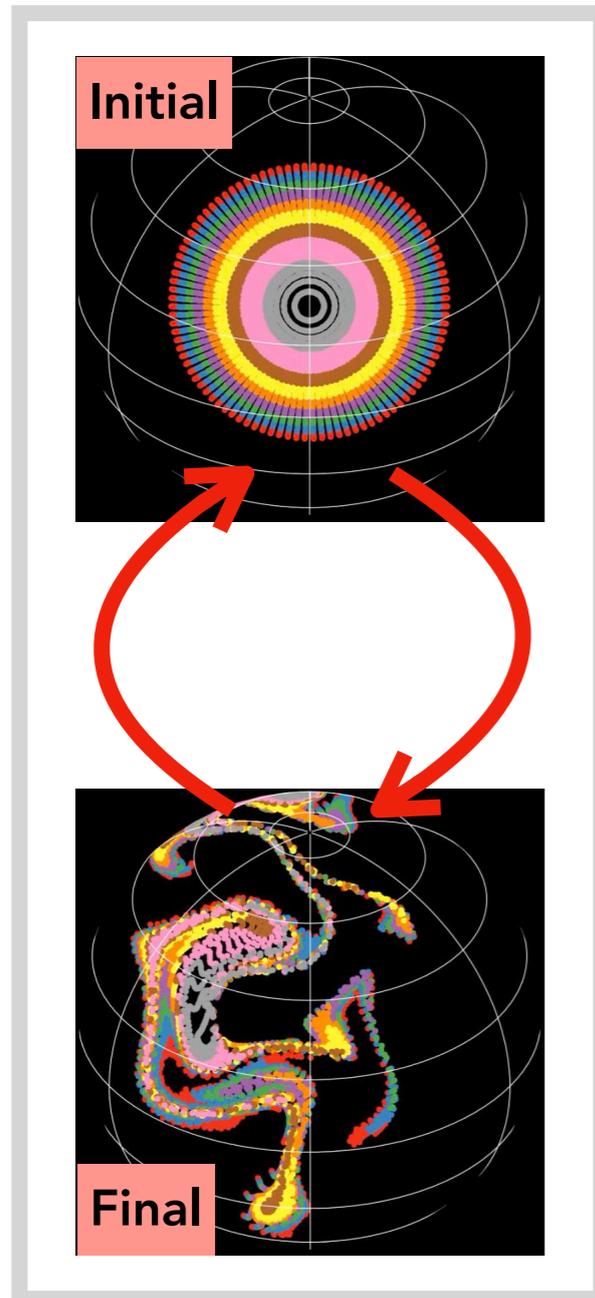
Un aller-retour



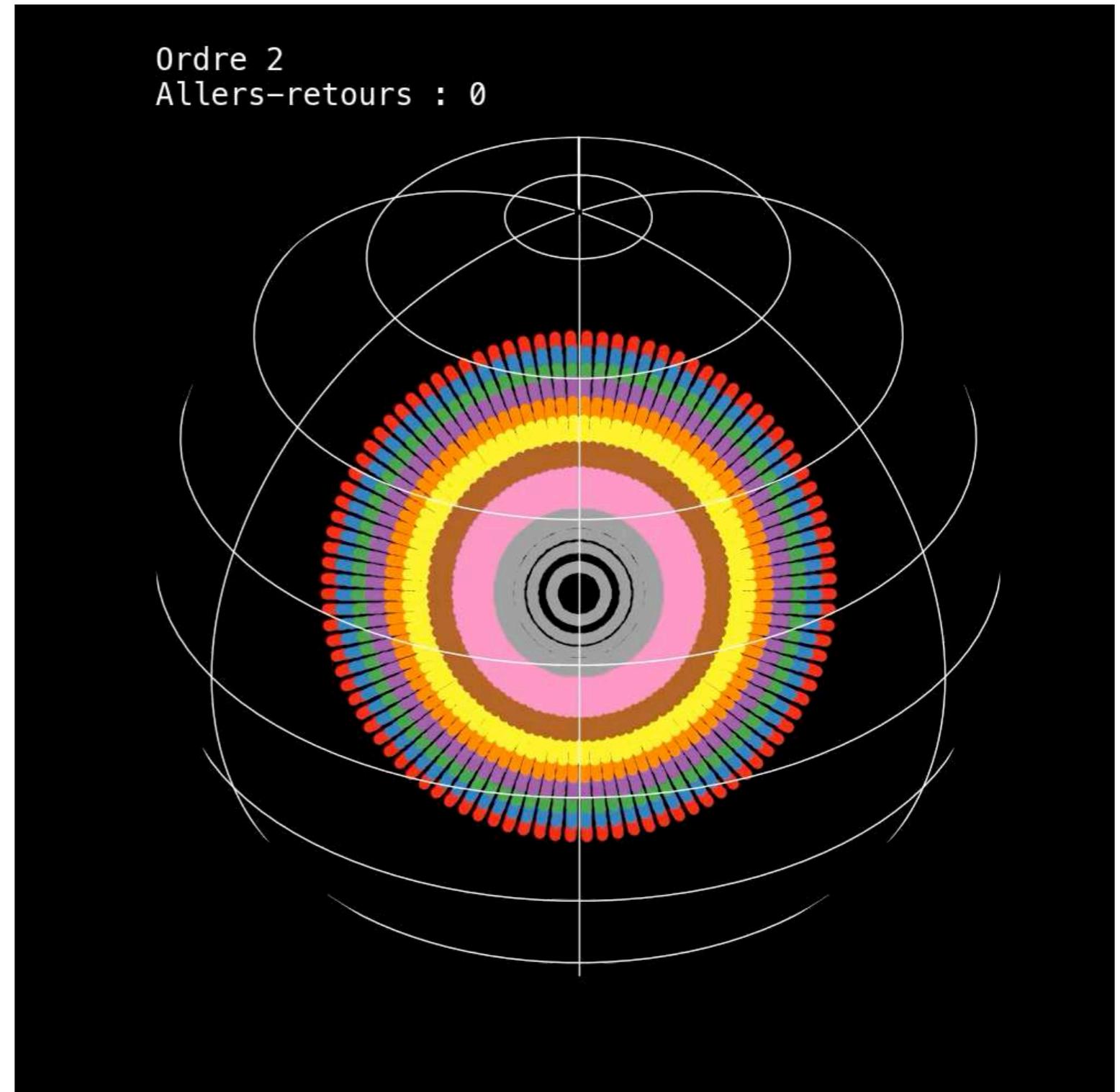
Un aller-retour = une image

# Affaire de répétition

On répète les **allers-retours**



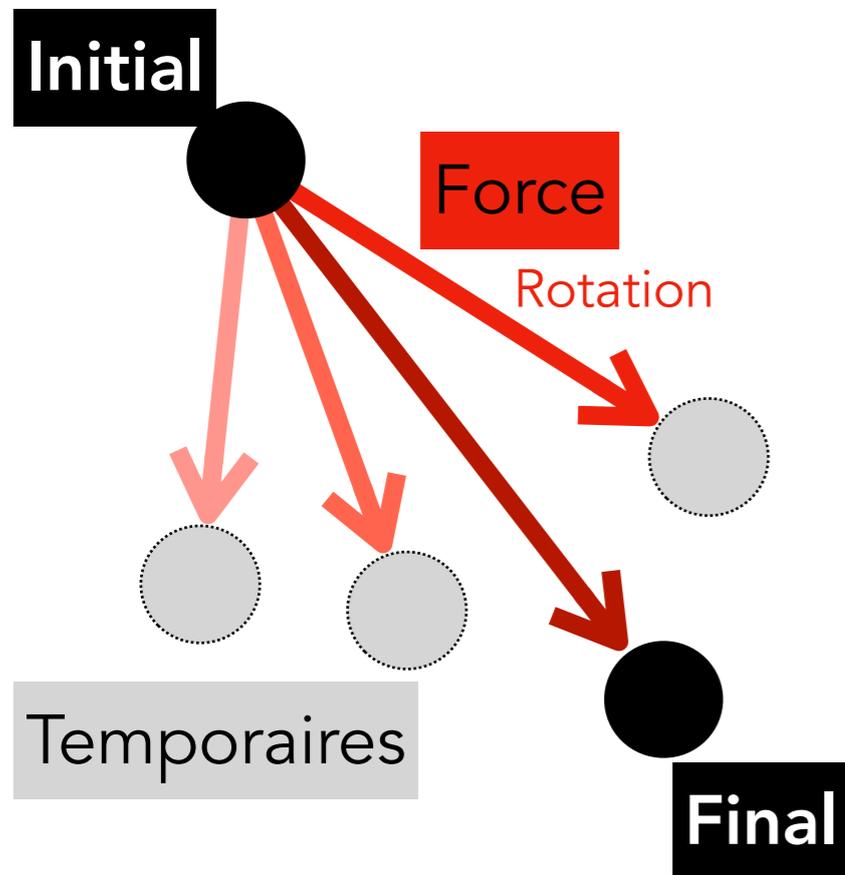
Un aller-retour



Présence d'une **diffusion numérique**. Pas glop

# Toujours plus haut (rang)

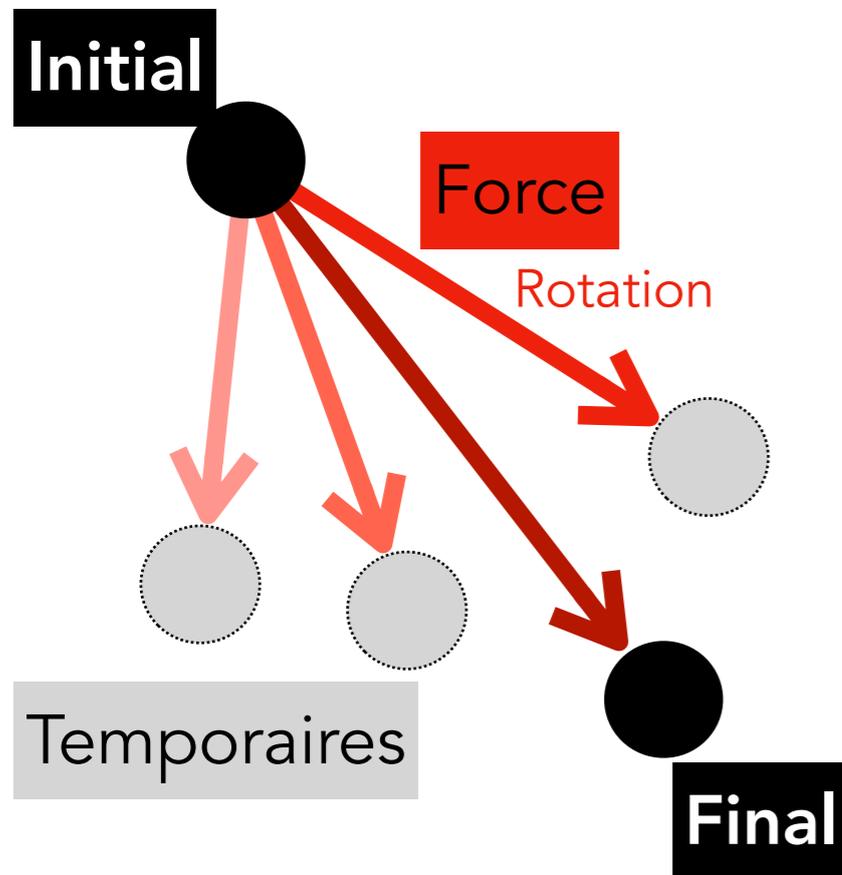
Schéma d'ordre 4



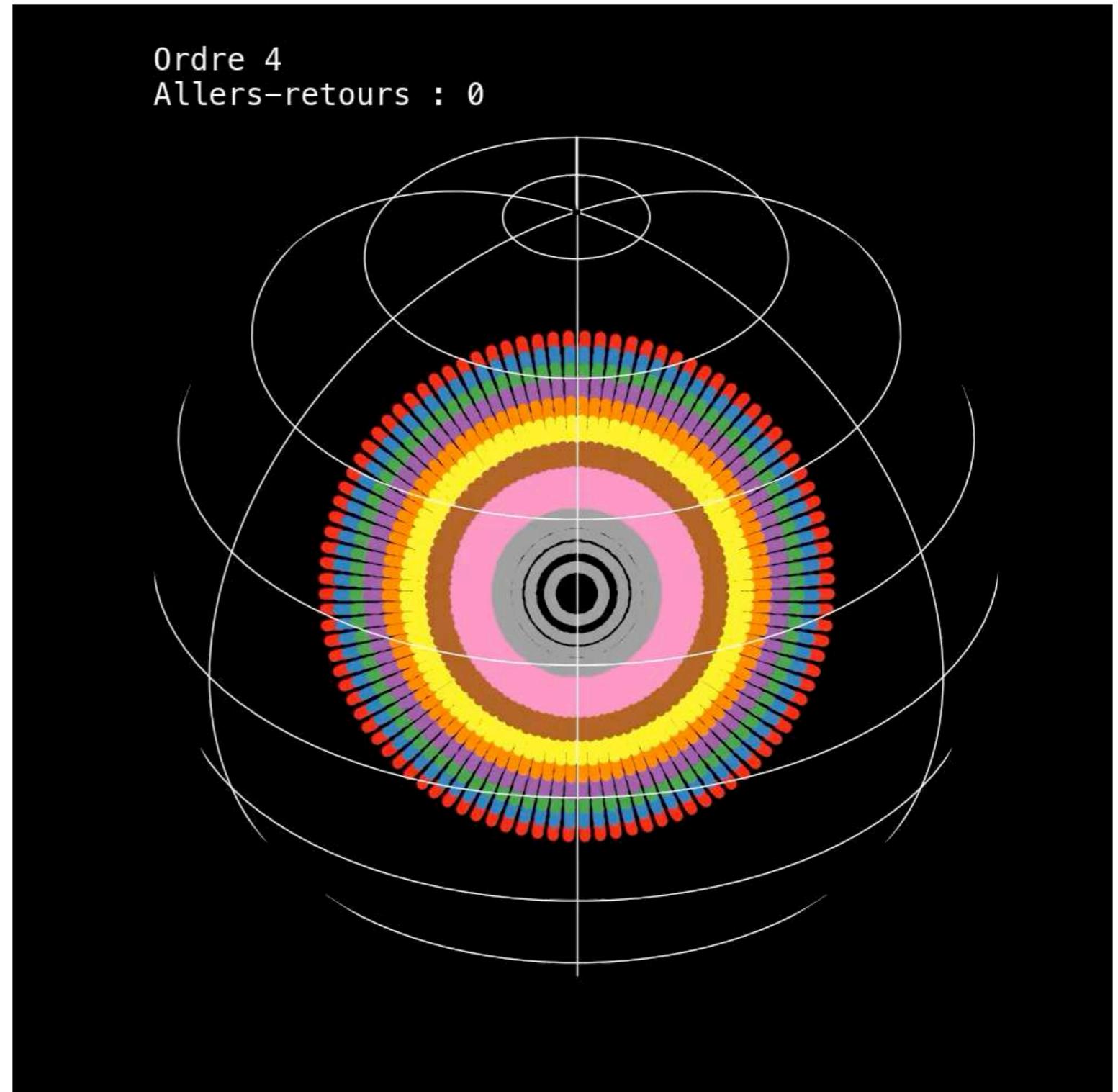
4 évaluations de force  
par pas de temps

# Toujours plus haut (rang)

Schéma d'ordre 4



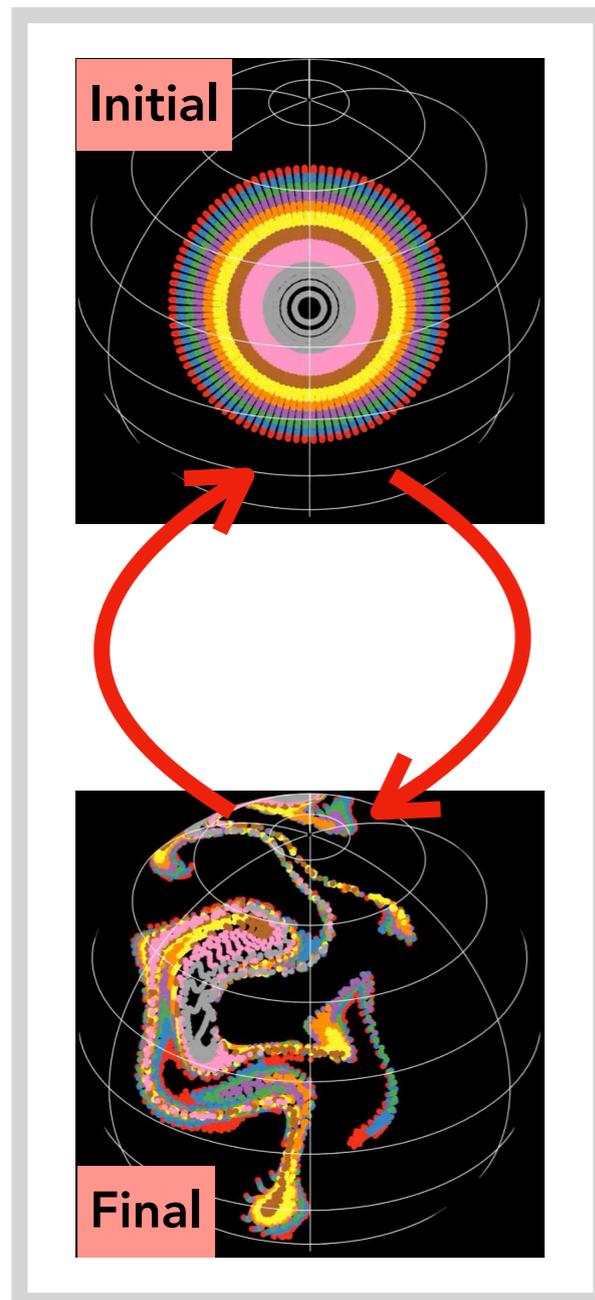
4 évaluations de force  
par pas de temps



Conditions initiales **préservées**, initialement

# Toujours plus loin

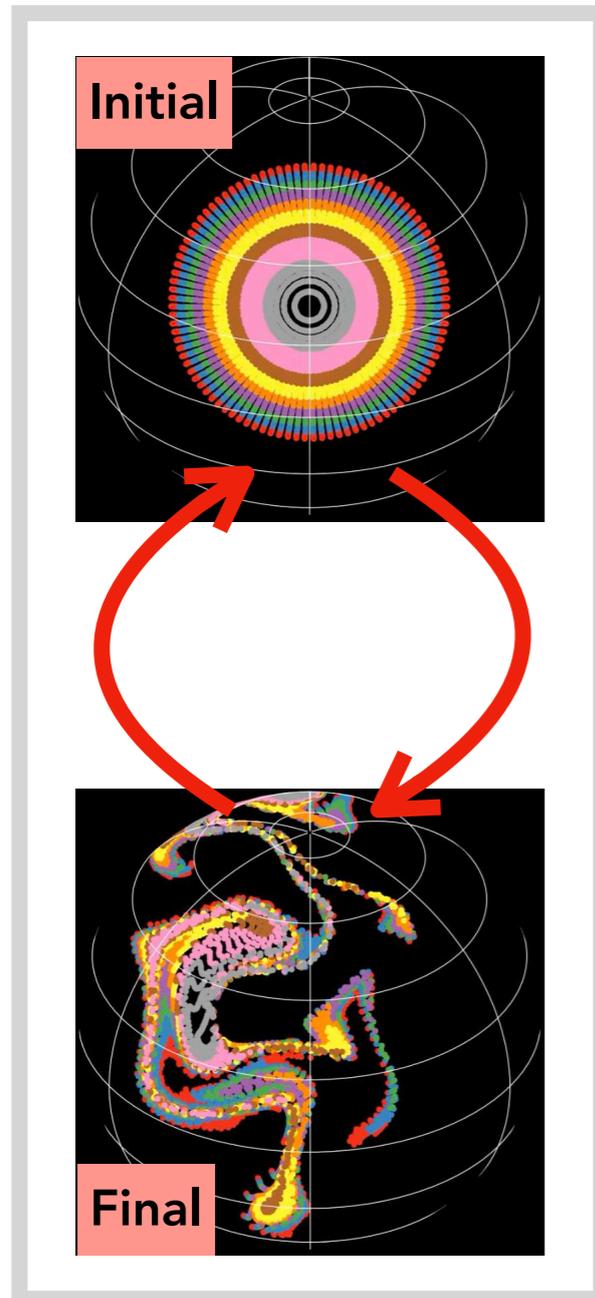
On répète les **allers-retours**



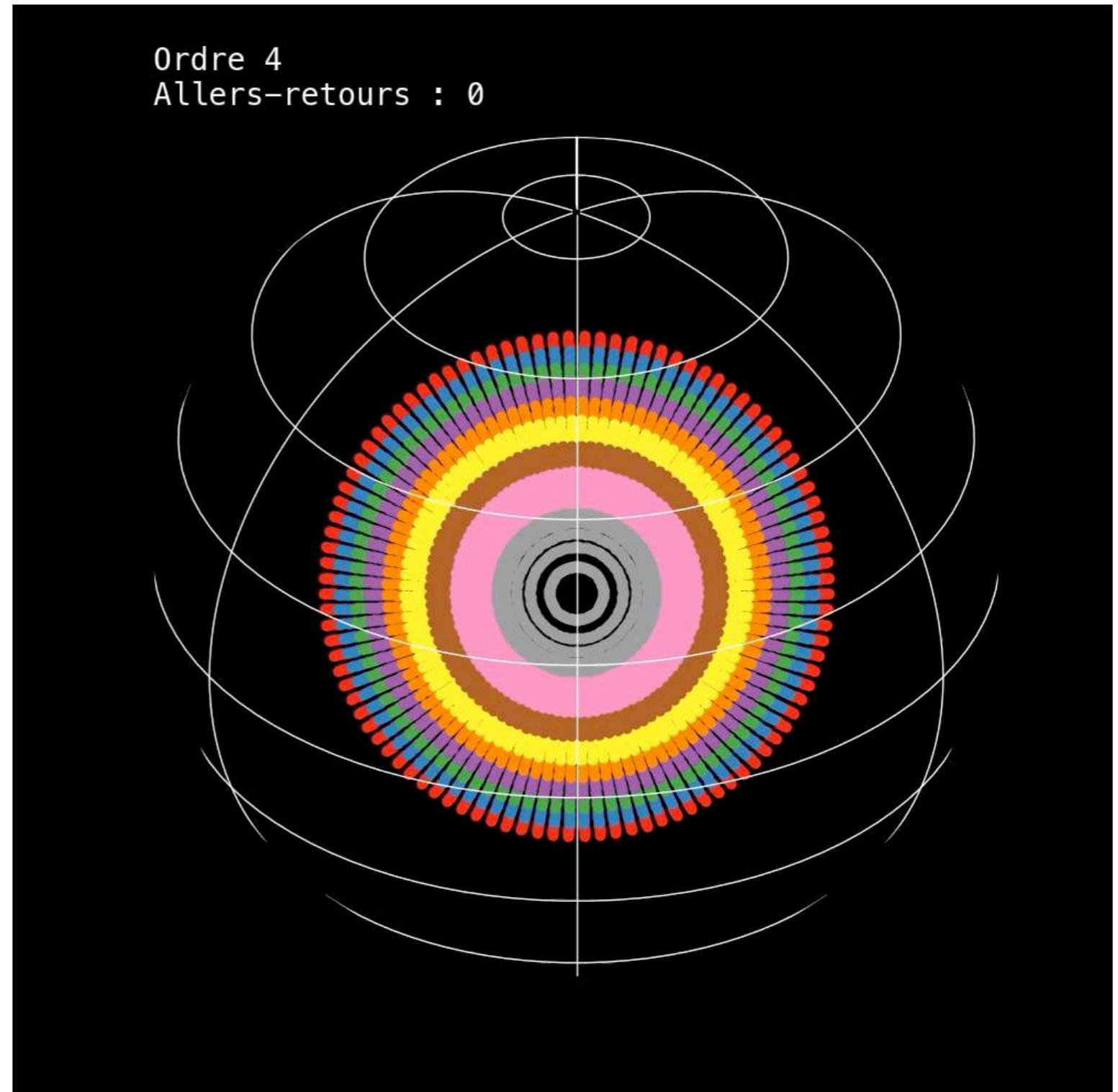
Un aller-retour

# Toujours plus loin

On répète les **allers-retours**



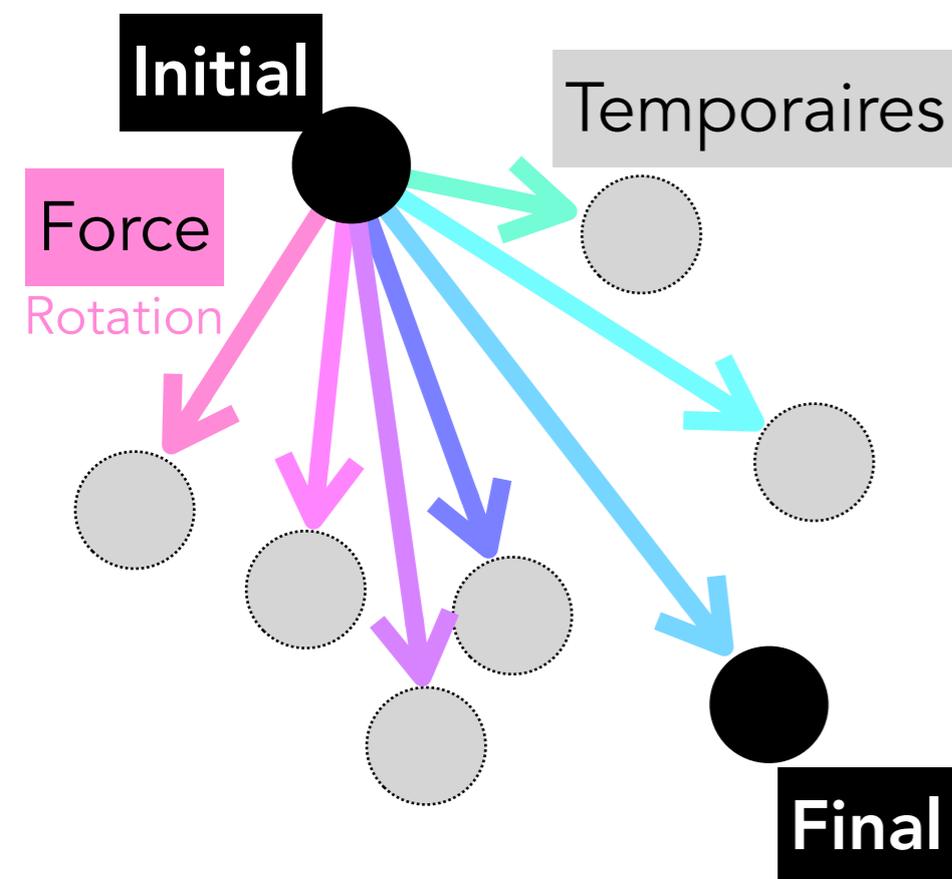
Un aller-retour



Pas encore parfait...

# Toujours plus fort

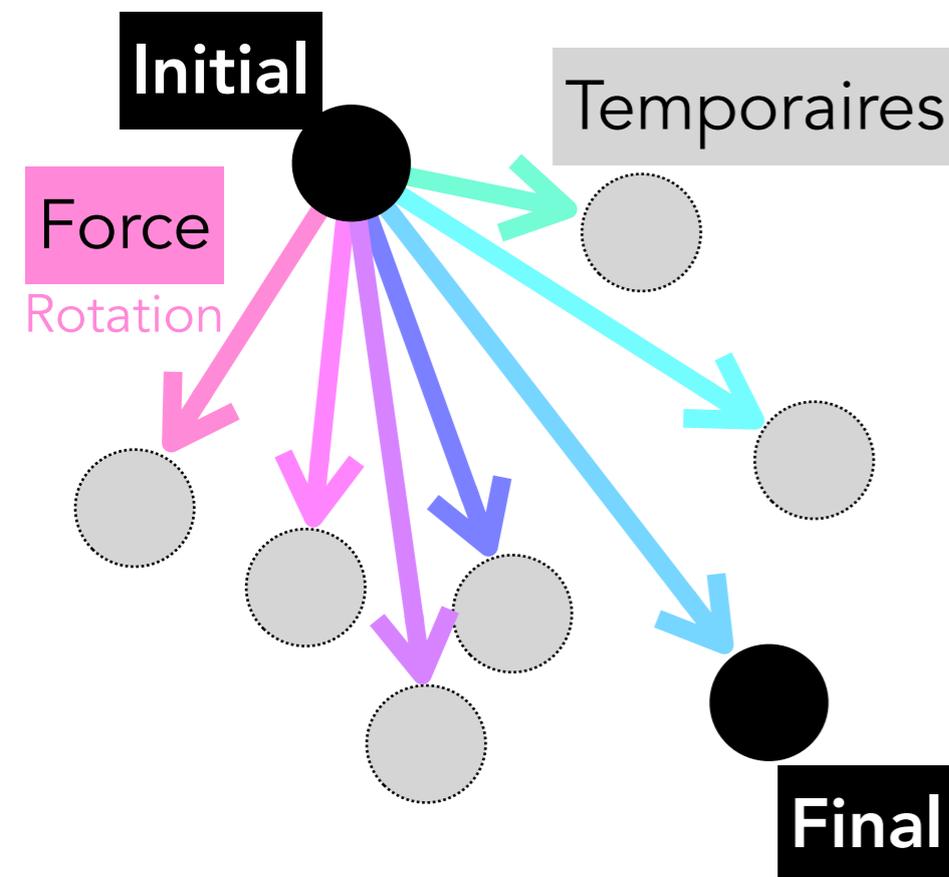
Schéma d'ordre 6



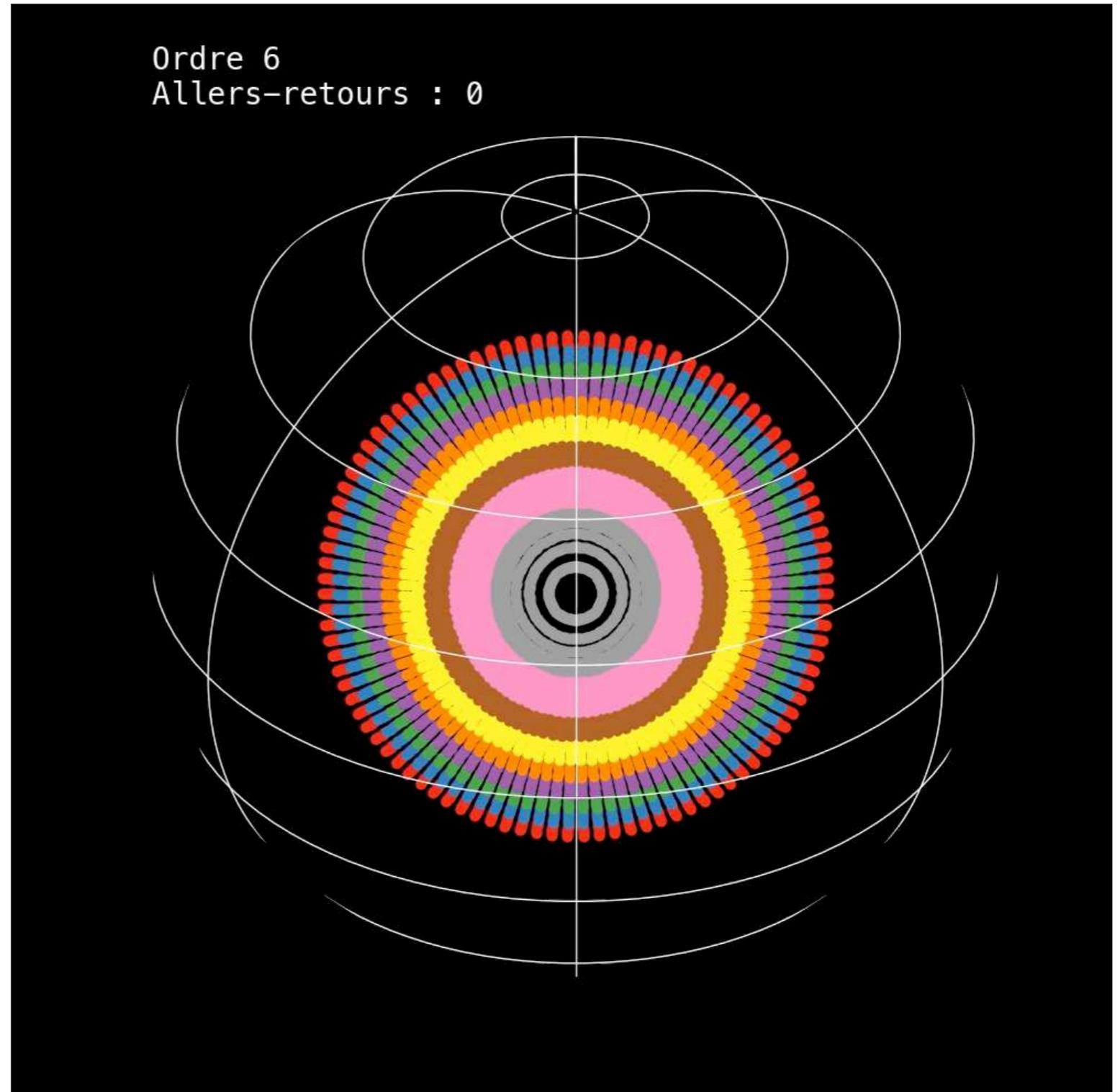
7 évaluations de force  
par pas de temps

# Toujours plus fort

Schéma d'ordre 6



7 évaluations de force  
par pas de temps

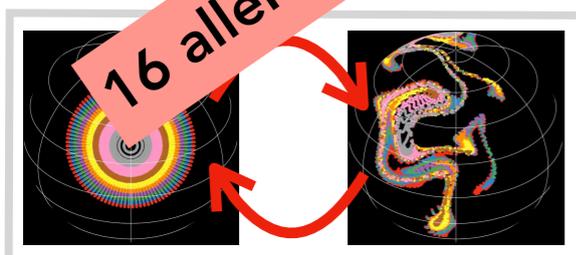
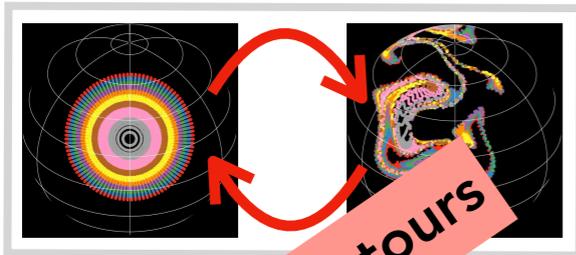
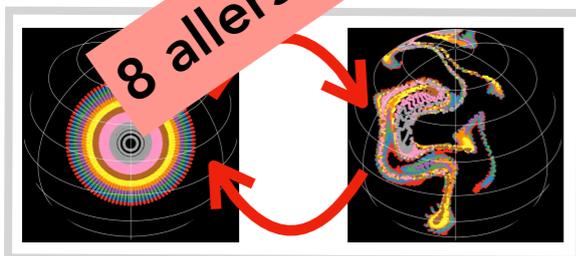
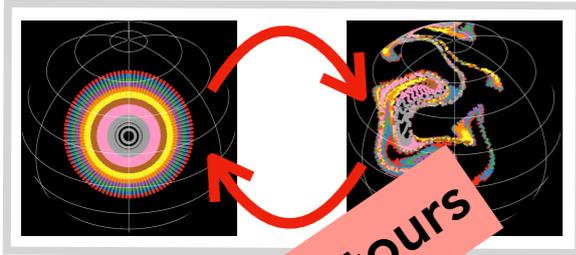
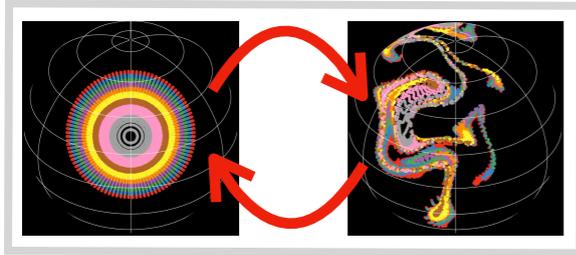


Ca ne bouge plus

# Vous reprendrez bien un peu d'allers-retours ?

Exploration à très long terme

:



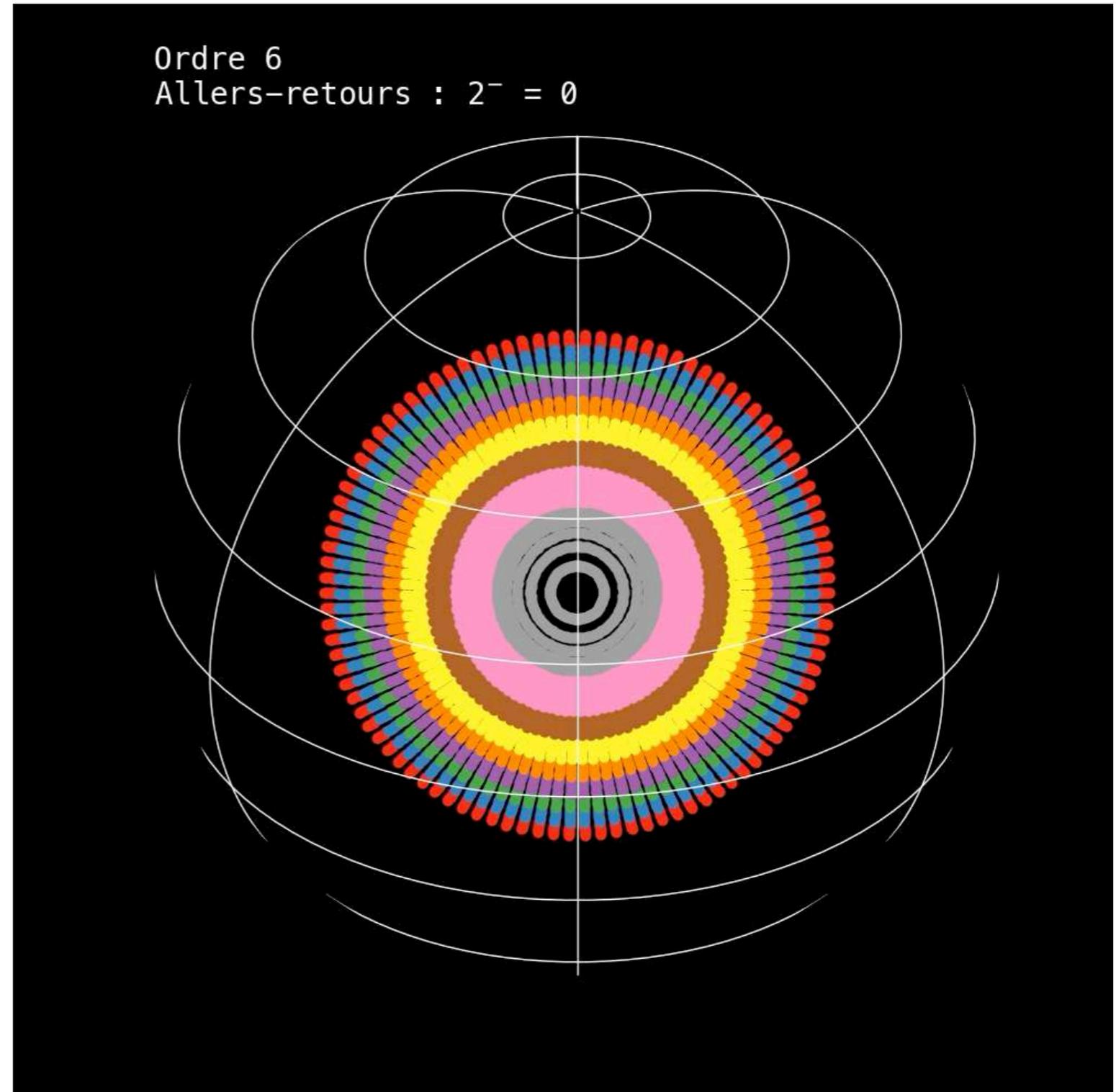
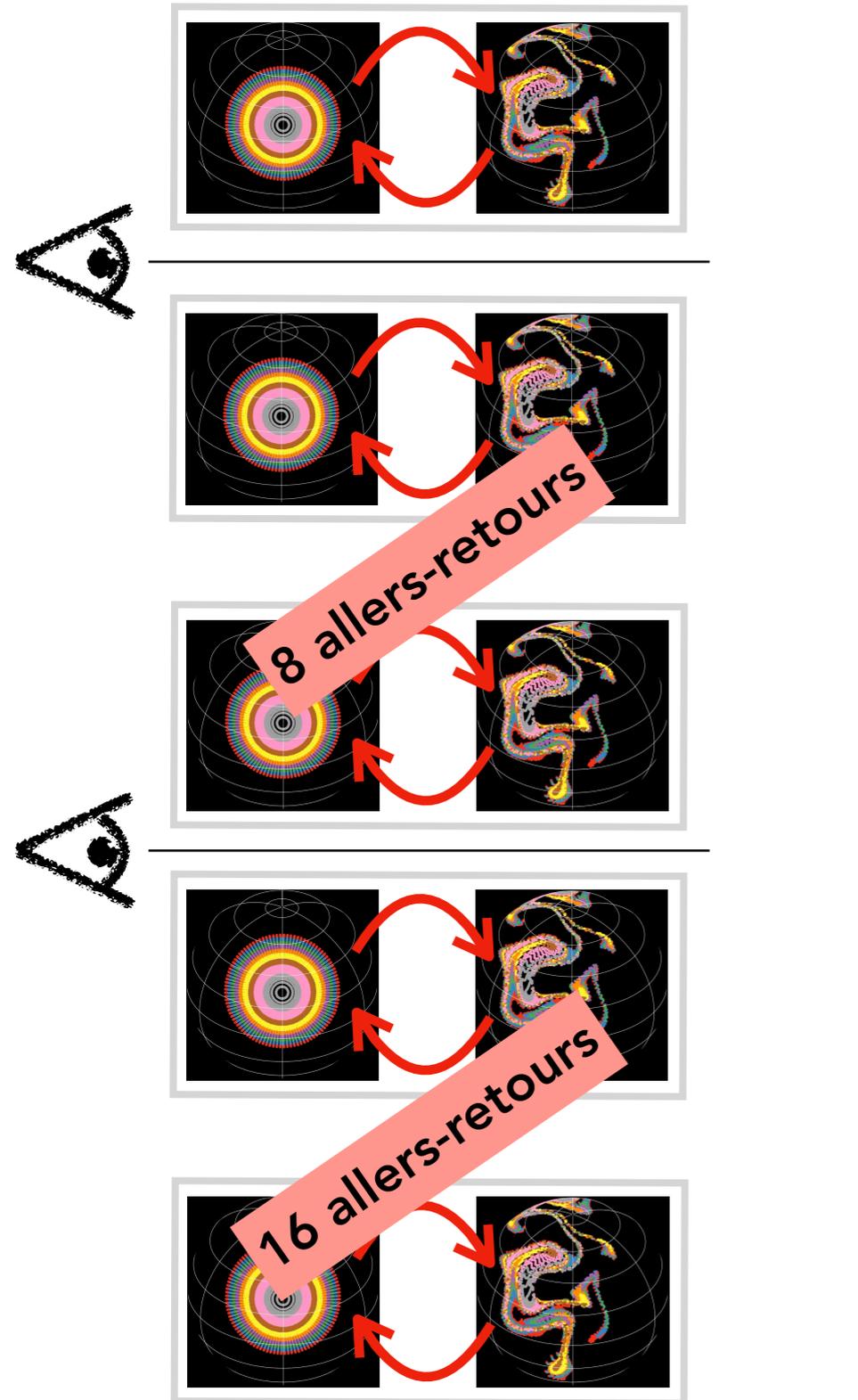
8 allers-retours

16 allers-retours

# Vous reprendrez bien un peu d'allers-retours ?

Exploration à très long terme

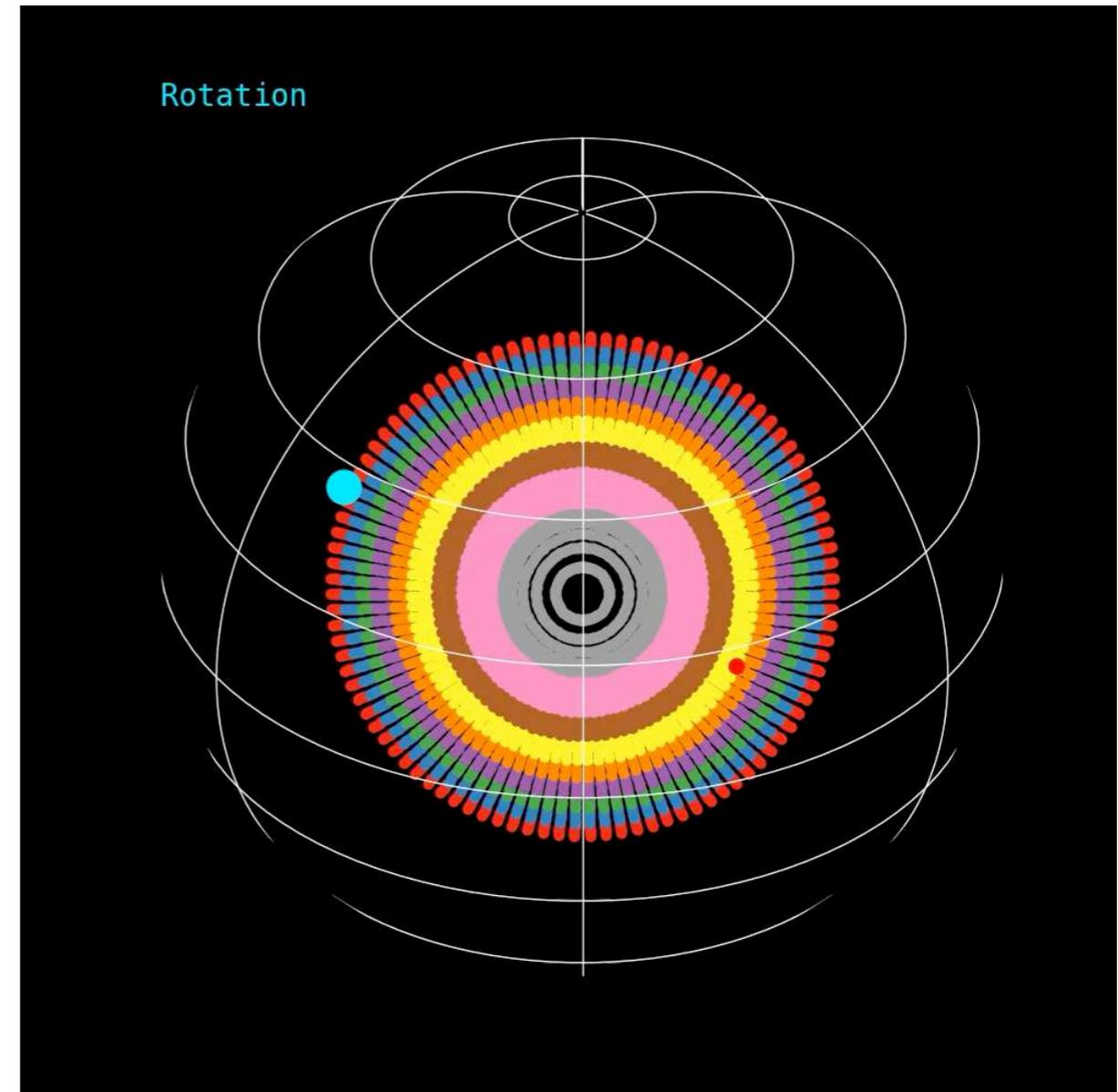
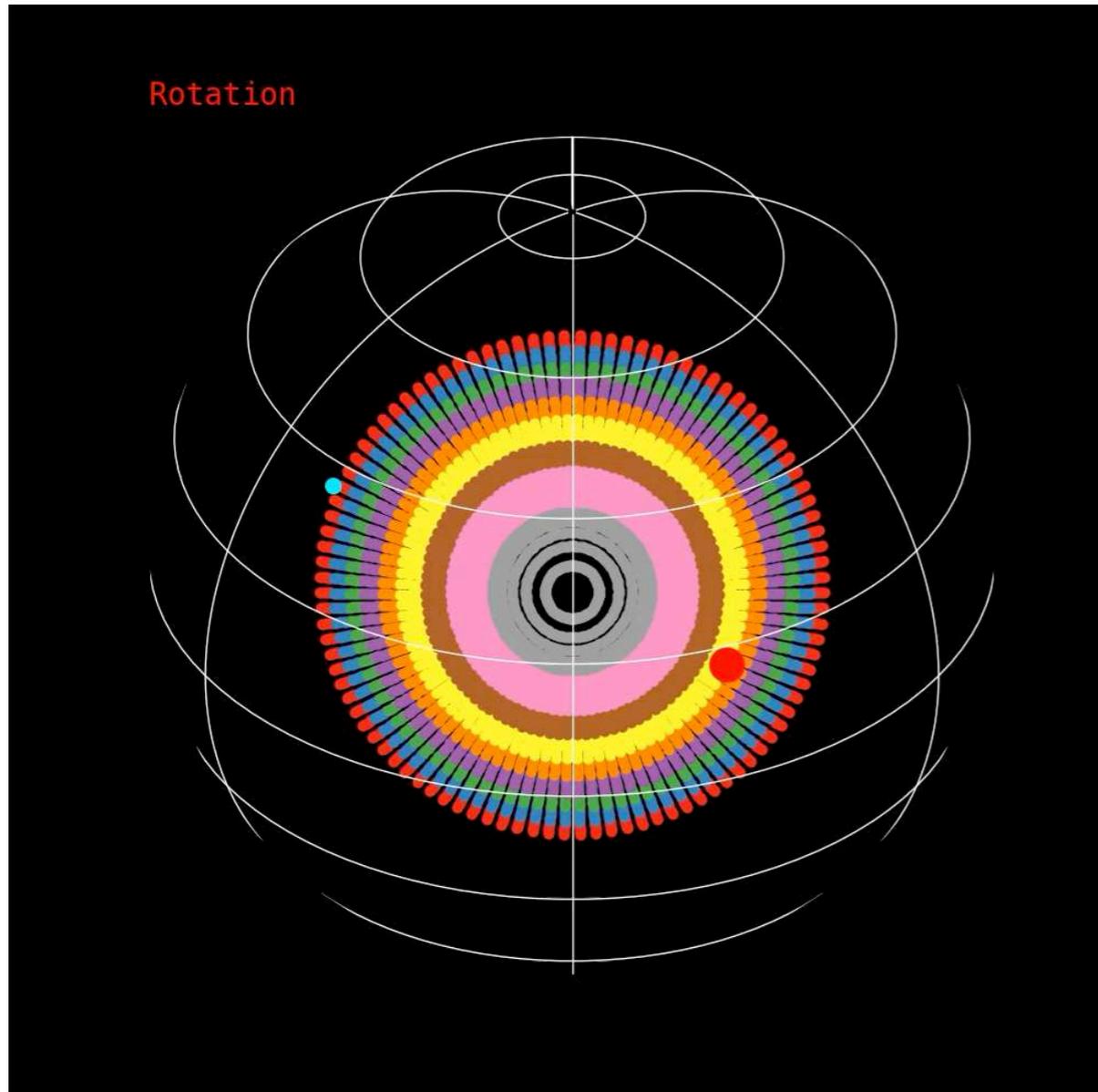
:



Ce n'est pas parfait. Pas glop.

# Tu me fais tourner la...sphère

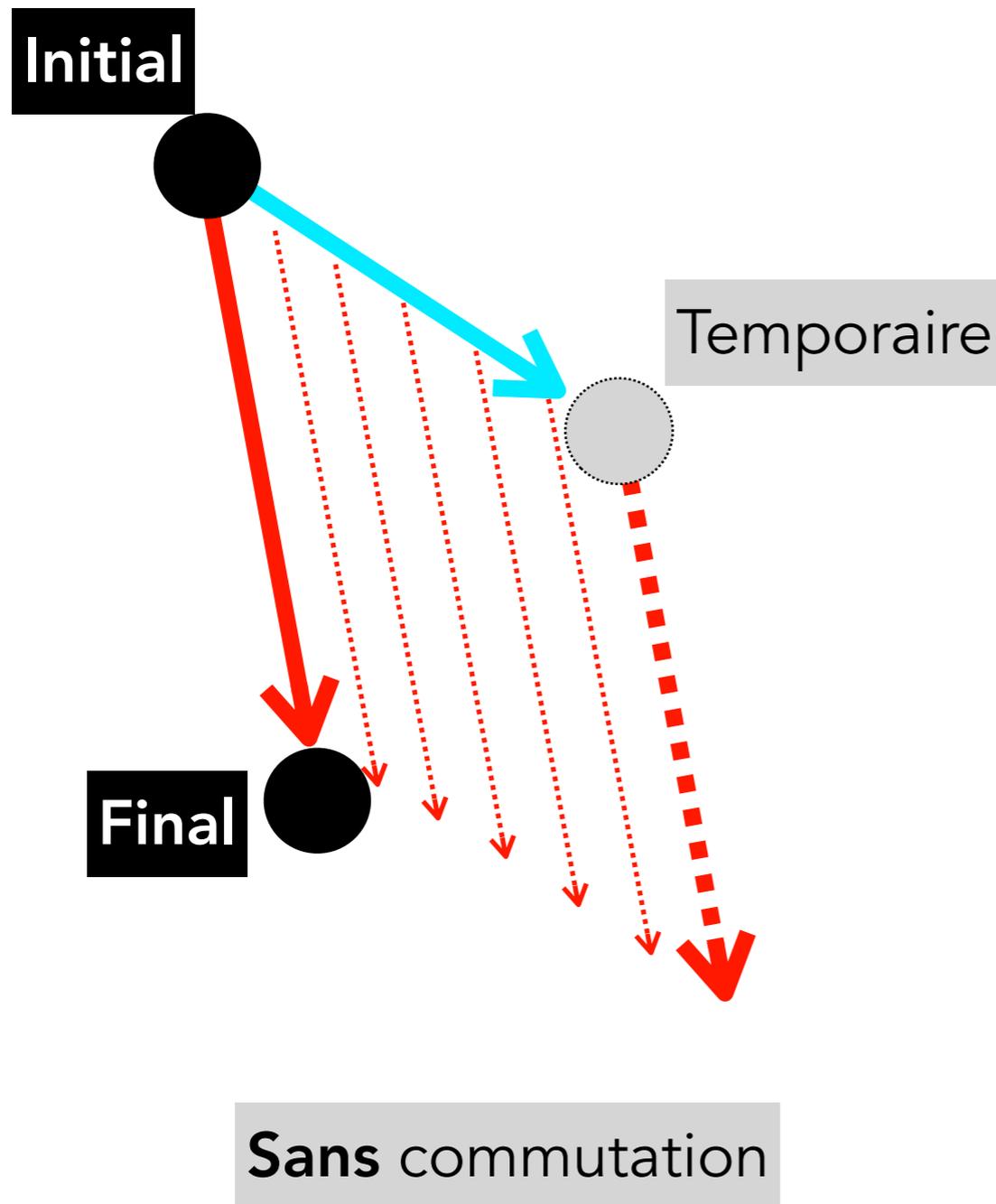
Effets de **deux rotations successives**



L'ordre des rotations compte

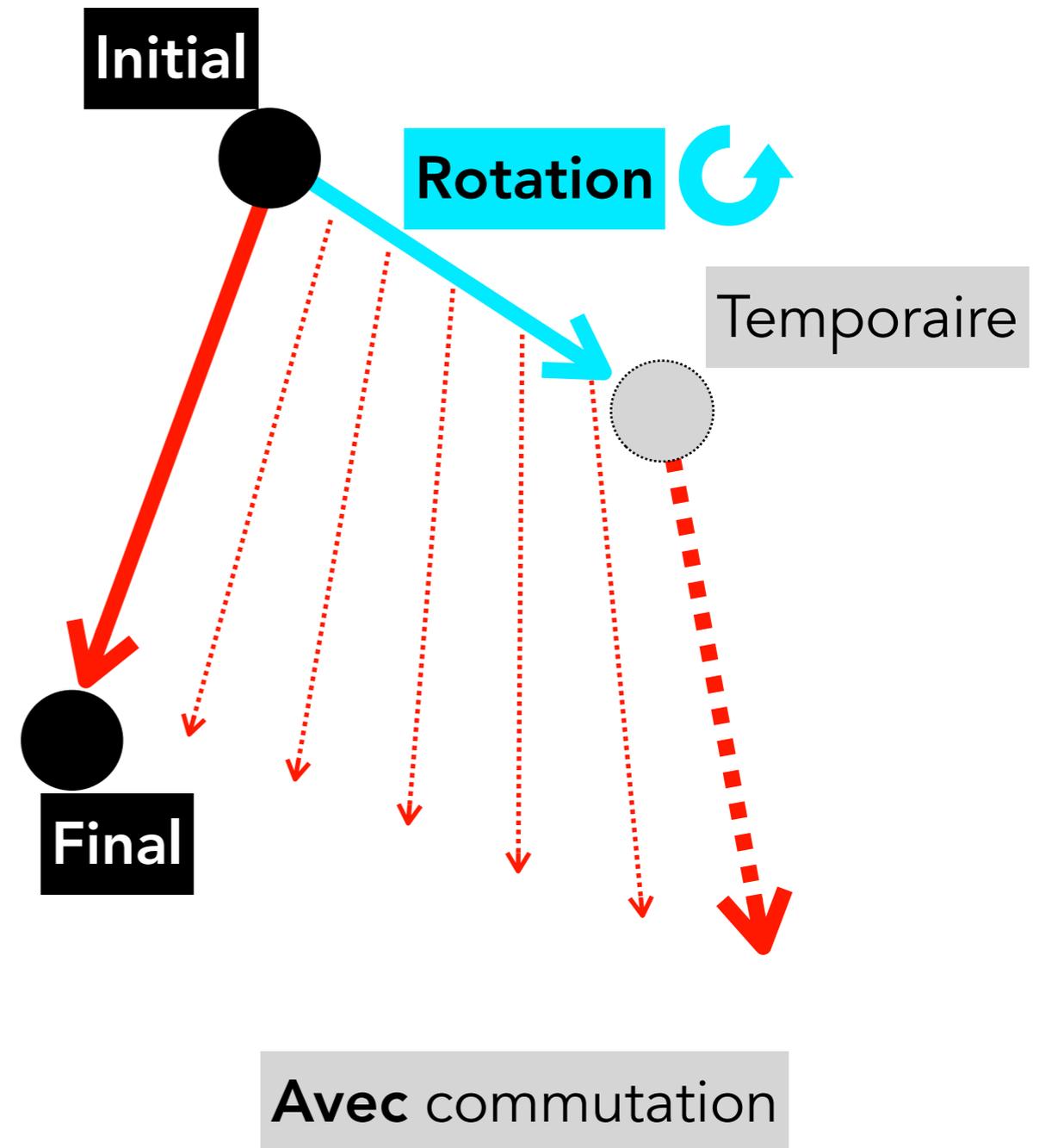
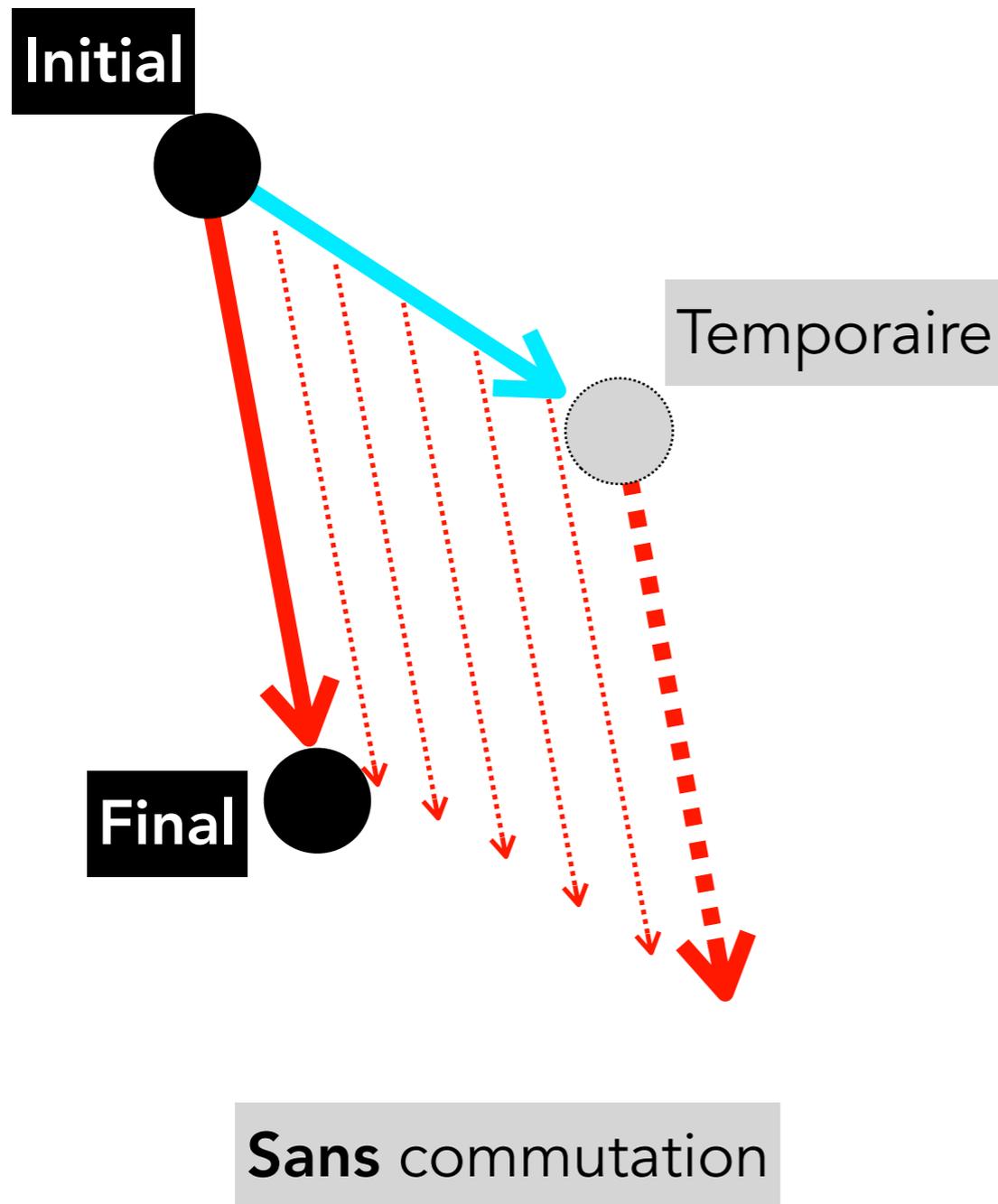
# Non-commutation

“Corriger” les rotations successives



# Non-commutation

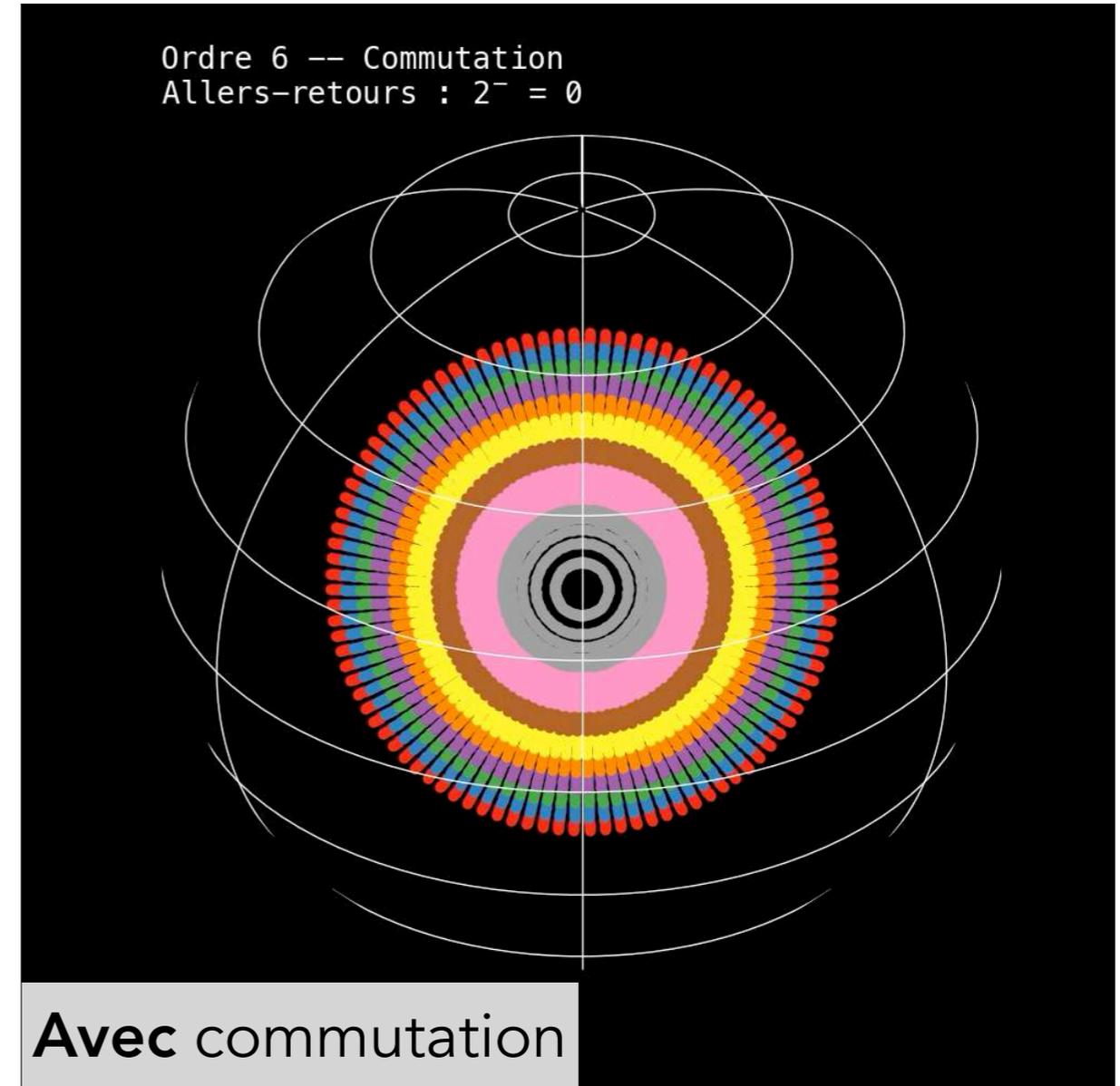
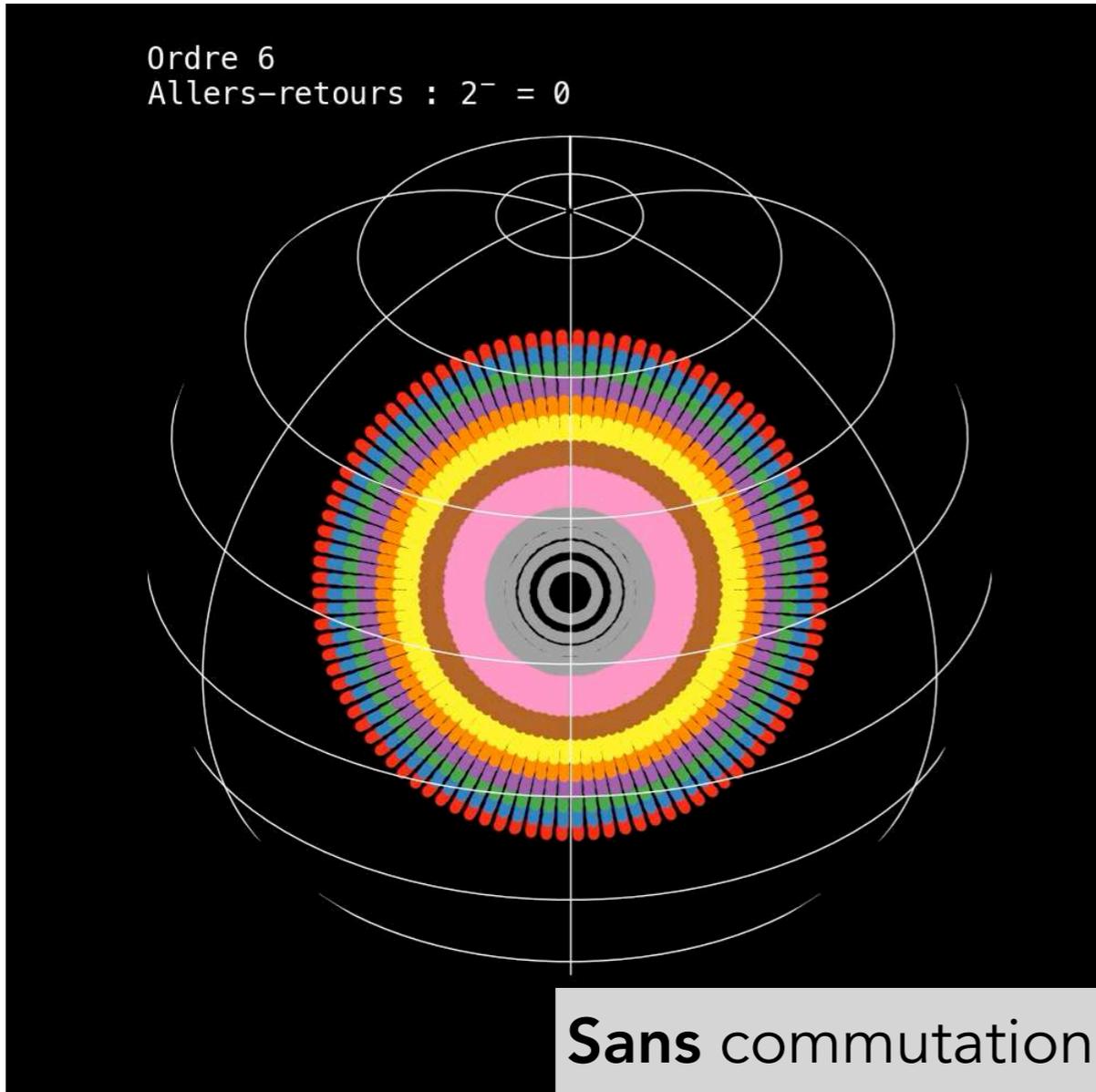
“Corriger” les rotations successives



“Faire tourner ce qui fait tourner”

# Et on fait tourner les...

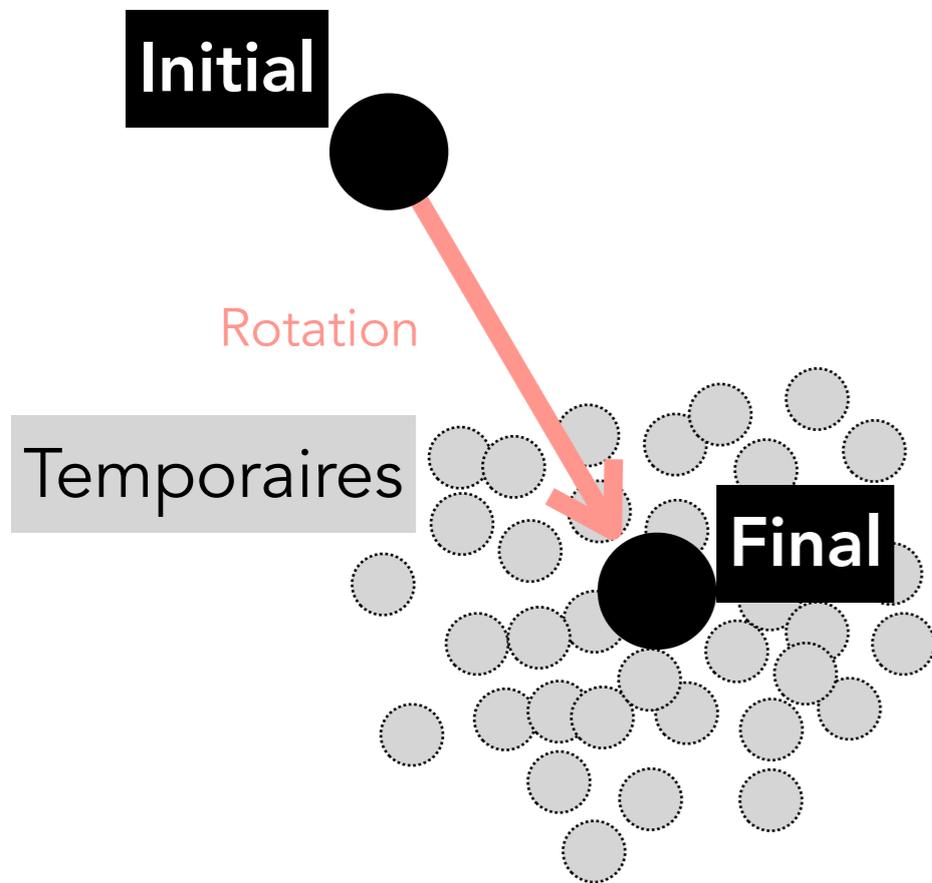
Exploration à (très) long terme



Intégration meilleure, à peu de frais  
Peut-on faire encore mieux ?

## Le ciel pour limite

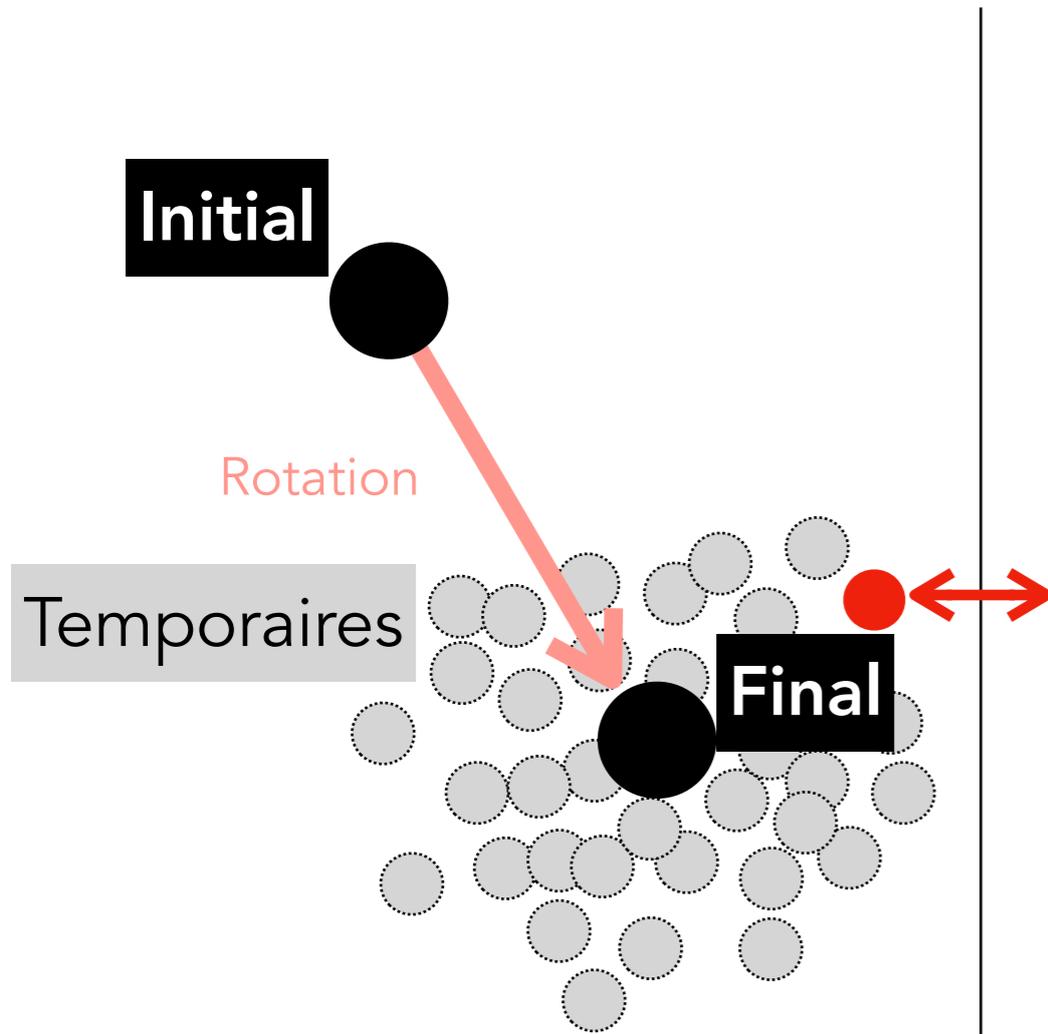
Schéma d'ordre 14



**35** évaluations de force  
par pas de temps

# Le ciel pour limite

## Schéma d'ordre 14



## Position de la 25ème étoile temporaire

```
a00 = 3.43347475853550878921093496257596781120623891072008459930197
a08 = 0.00249163204855817407538949148805995149459884653585417680098222
a09 = 0.0230138787854593149638399846373742768772087122638142234223658
a10 = -0.00322155956692977098724476092467120878189463604760620461043308
a11 = 0.00988442549447664668946335414487885256040819982786014648129297
a12 = 2.16252799377922507788307841904757354045759225335732707916530
a13 = -16.2699864546457421328065640660139489006987552040228852402716
a14 = -0.128534502120524552843583417470935010538029037542654506231743
a15 = -8.98915042666504253089307820833379330486511746063552853023189
a16 = -0.00348595363232025333387080201851013650192401767250513765000963
a17 = 15.7936194113339807536235187388695574135853387025139738341334
a18 = -0.574403330914095065628165482017335820148383663195675408024658
a19 = -0.345602039021393296692722496608124982535237228827655306030152
a20 = -0.00662241490206585091731619991383757781133067992707418687587487
a21 = -0.00777788129242204164032546458607364309759347209626759111946150
a22 = -0.00356084192402274913338827232697437364675240818791706587952939
a23 = 4.79282506449930799649797749629840189457296934139359048988332
a24 = 0.153725464873068577844576387402512082757034273069877432944621
```

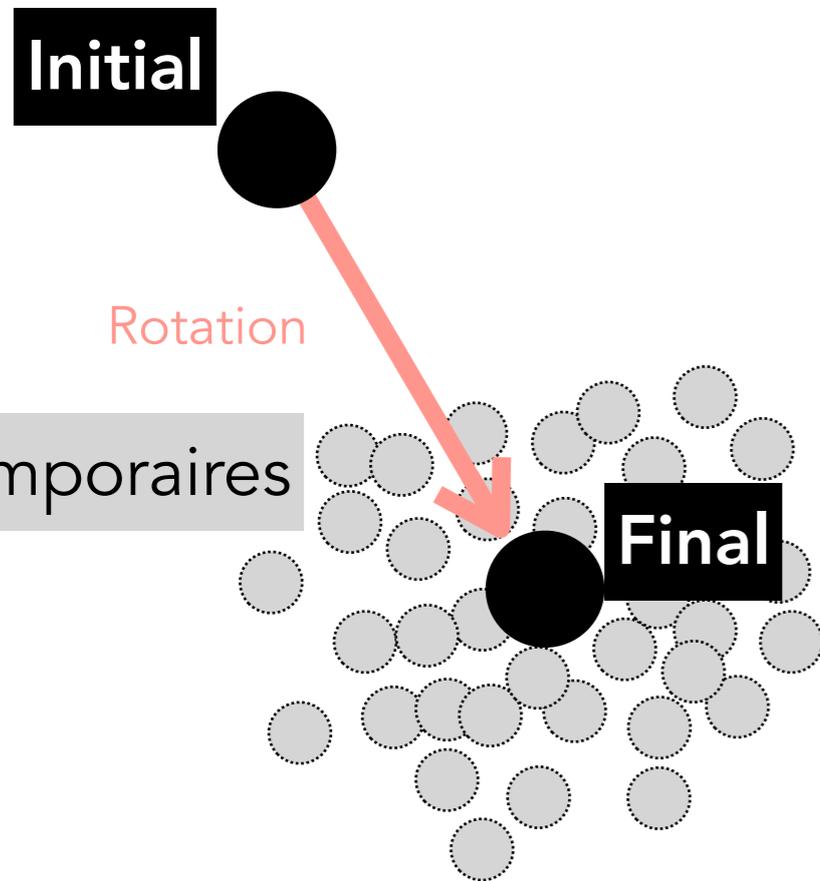
**35** évaluations de force  
par pas de temps

Au total, **360 coefficients**  
précisément ajustés

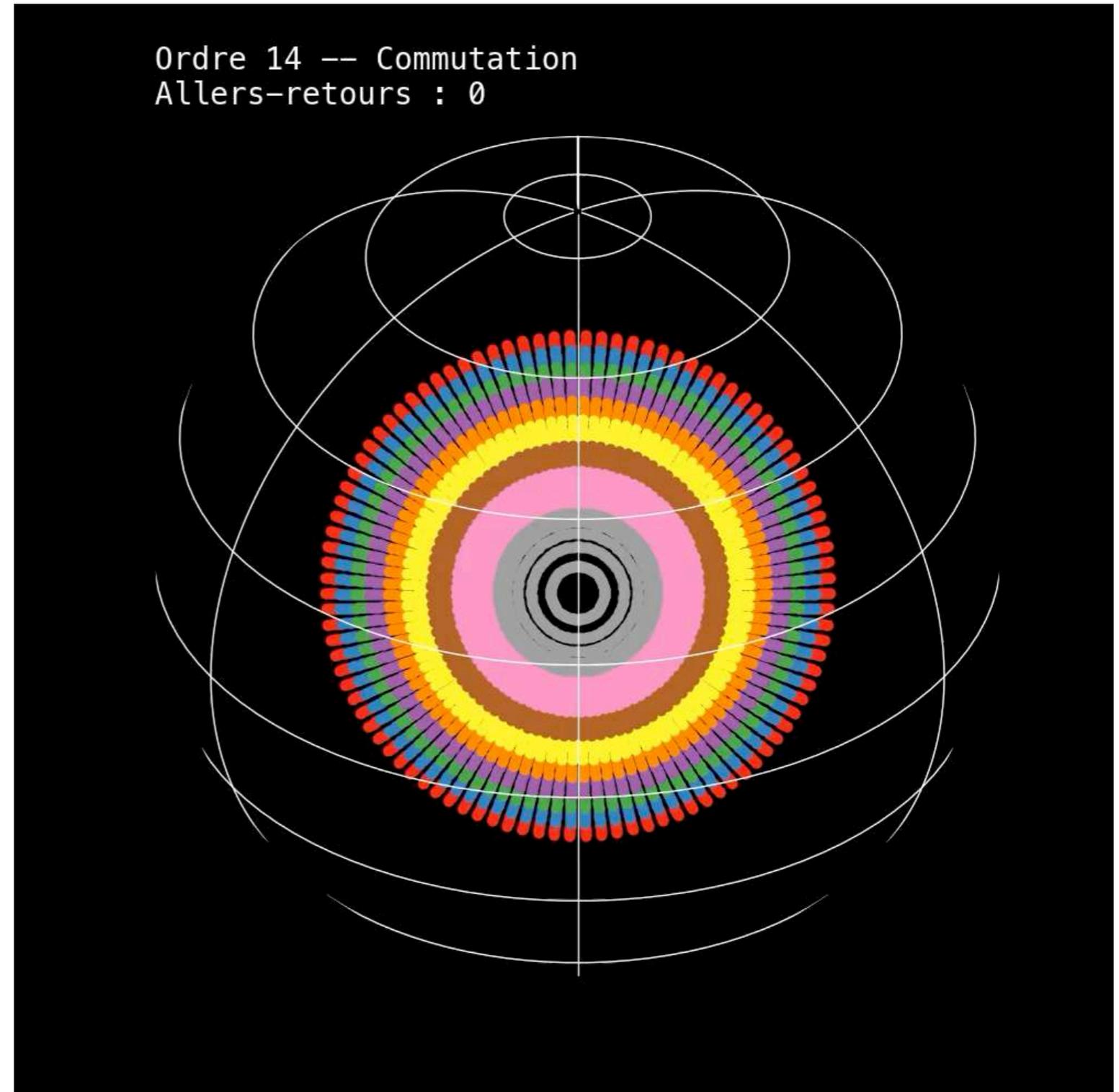
Concevoir un intégrateur : un travail d'horloger

# Le ciel pour limite

Schéma d'ordre 14



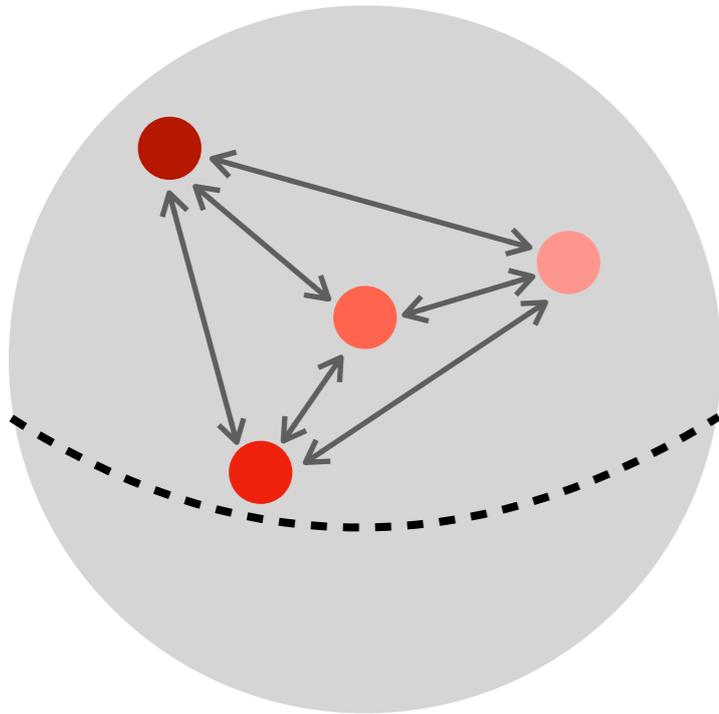
**35** évaluations de force  
par pas de temps



Tout se passe bien. Regardons d'encore plus près

# Invariants globaux

## Energie totale



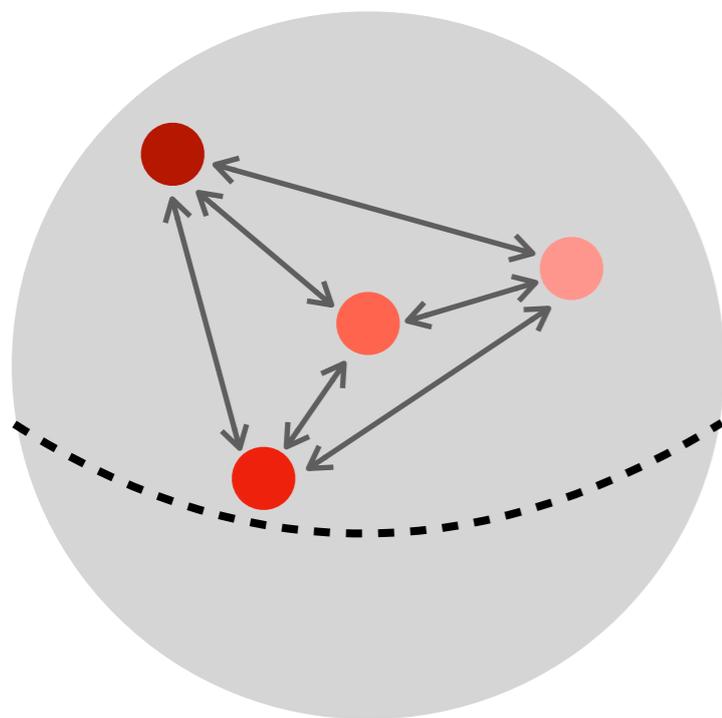
Somme de tous les couplages

$$E_{\text{tot}} = \sum_{\bullet} \sum_{\bullet} \{ \bullet \leftrightarrow \bullet \}$$

Energie totale  
**exactement conservée**

# Comment est votre... précision ?

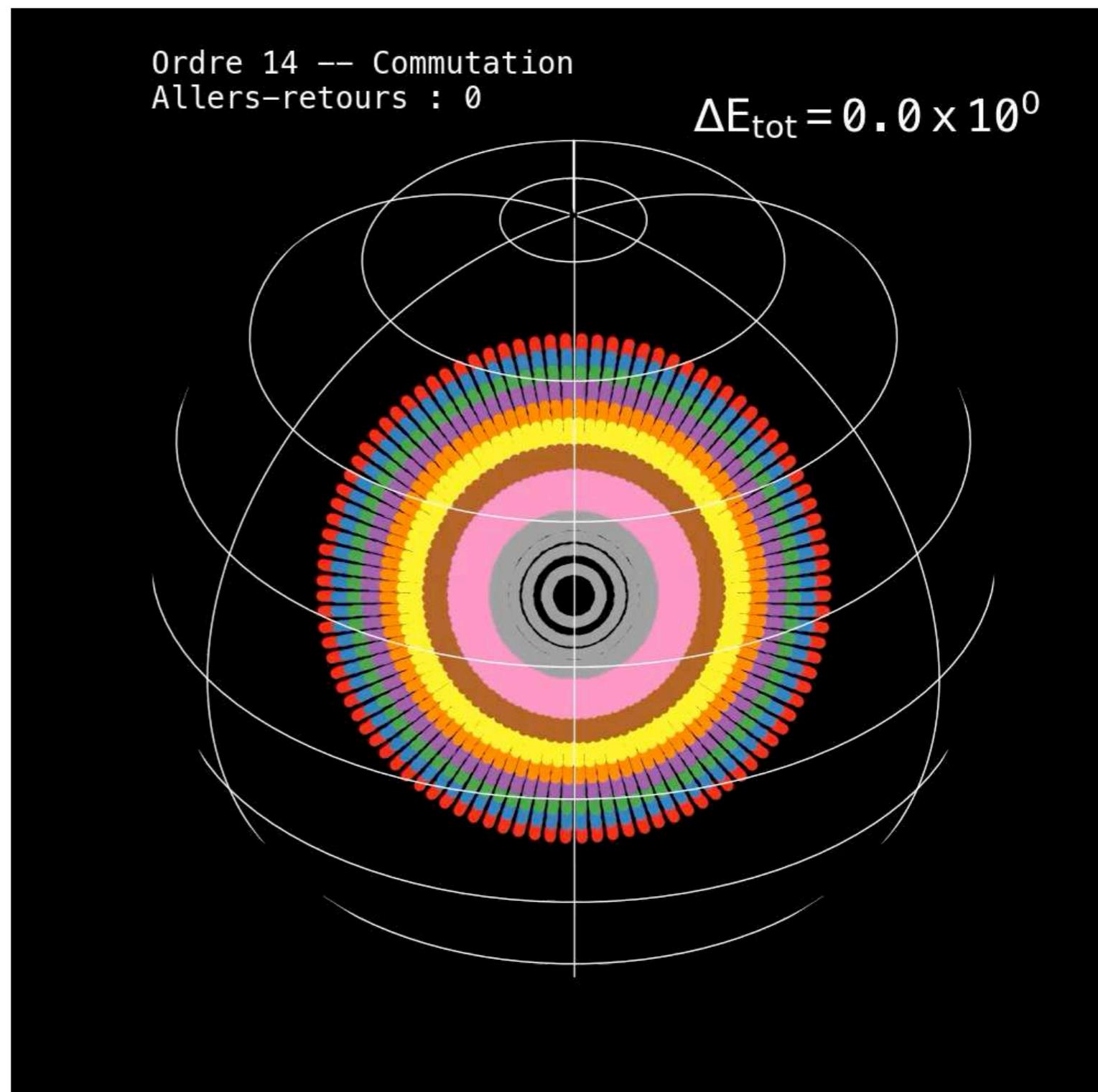
## Energie totale



Somme de tous les couplages

$$E_{\text{tot}} = \sum_{\bullet} \sum_{\bullet} \{ \bullet \leftrightarrow \bullet \}$$

Energie totale  
**exactement conservée**

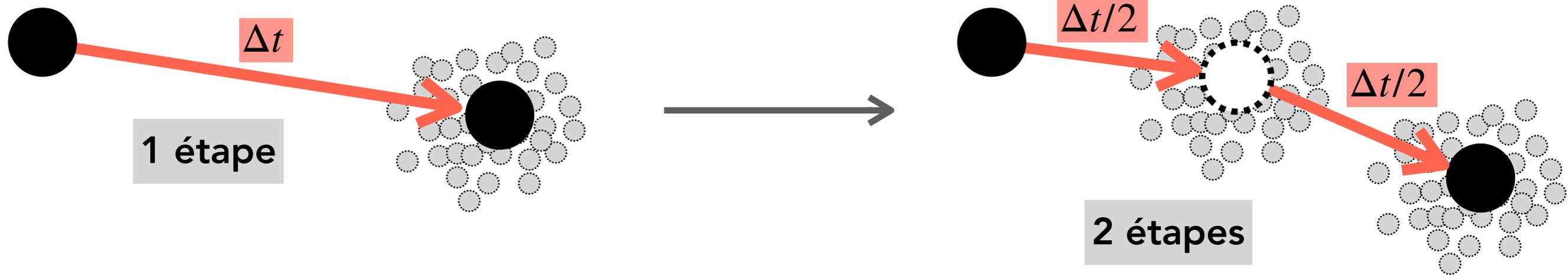


Erreur  $\simeq 10^{-13}$

13 chiffres significatifs

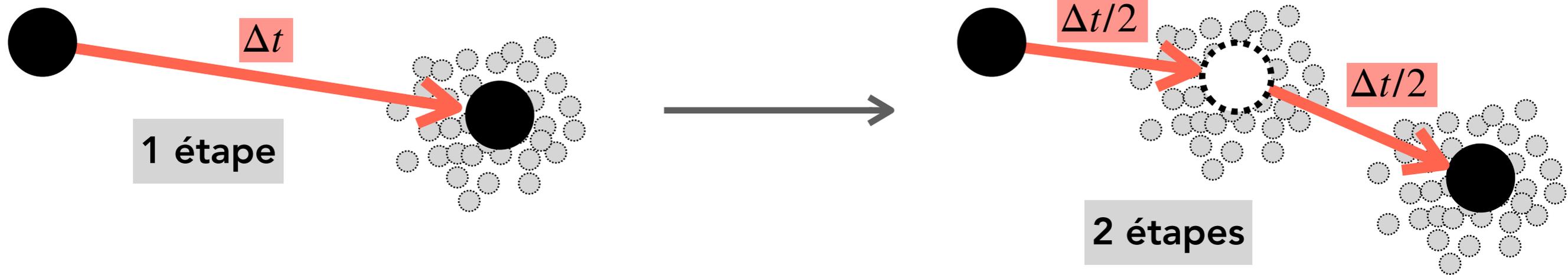
# Prendre son temps

Diviser le pas de temps par 2



# Prendre son temps

Diviser le pas de temps par 2



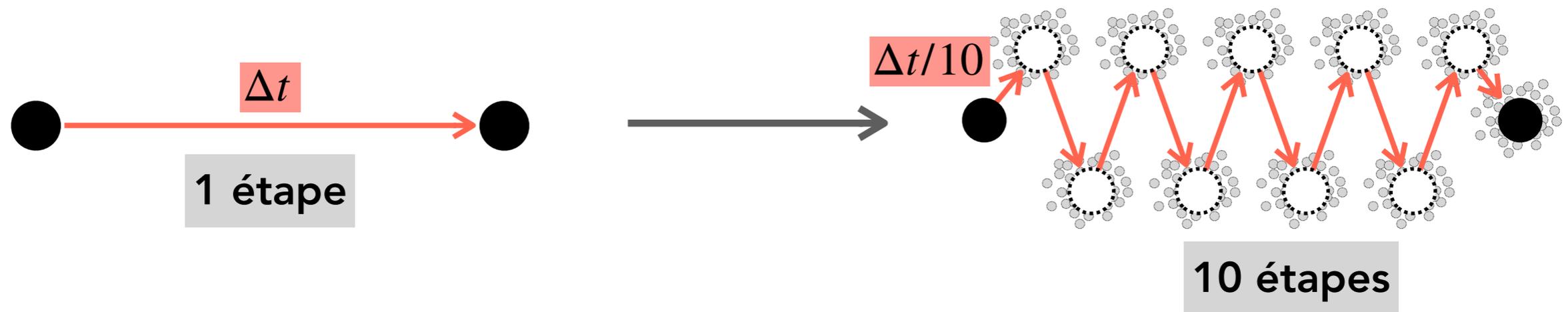
$$\Delta t \longrightarrow \Delta t/2$$

$$\text{Erreur} \longrightarrow \text{Erreur} / 2^{14}$$

Plus l'ordre est élevé, plus l'erreur se réduit vite

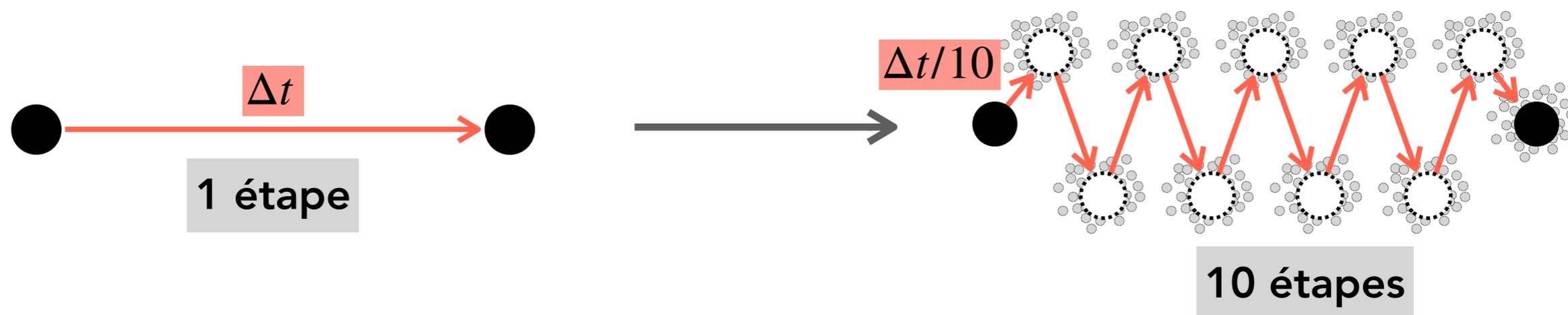
# Vraiment prendre son temps

Réduire encore le pas de temps



# Vraiment prendre son temps

Réduire encore le pas de temps



$\Delta t$



$\Delta t/10$

Erreur

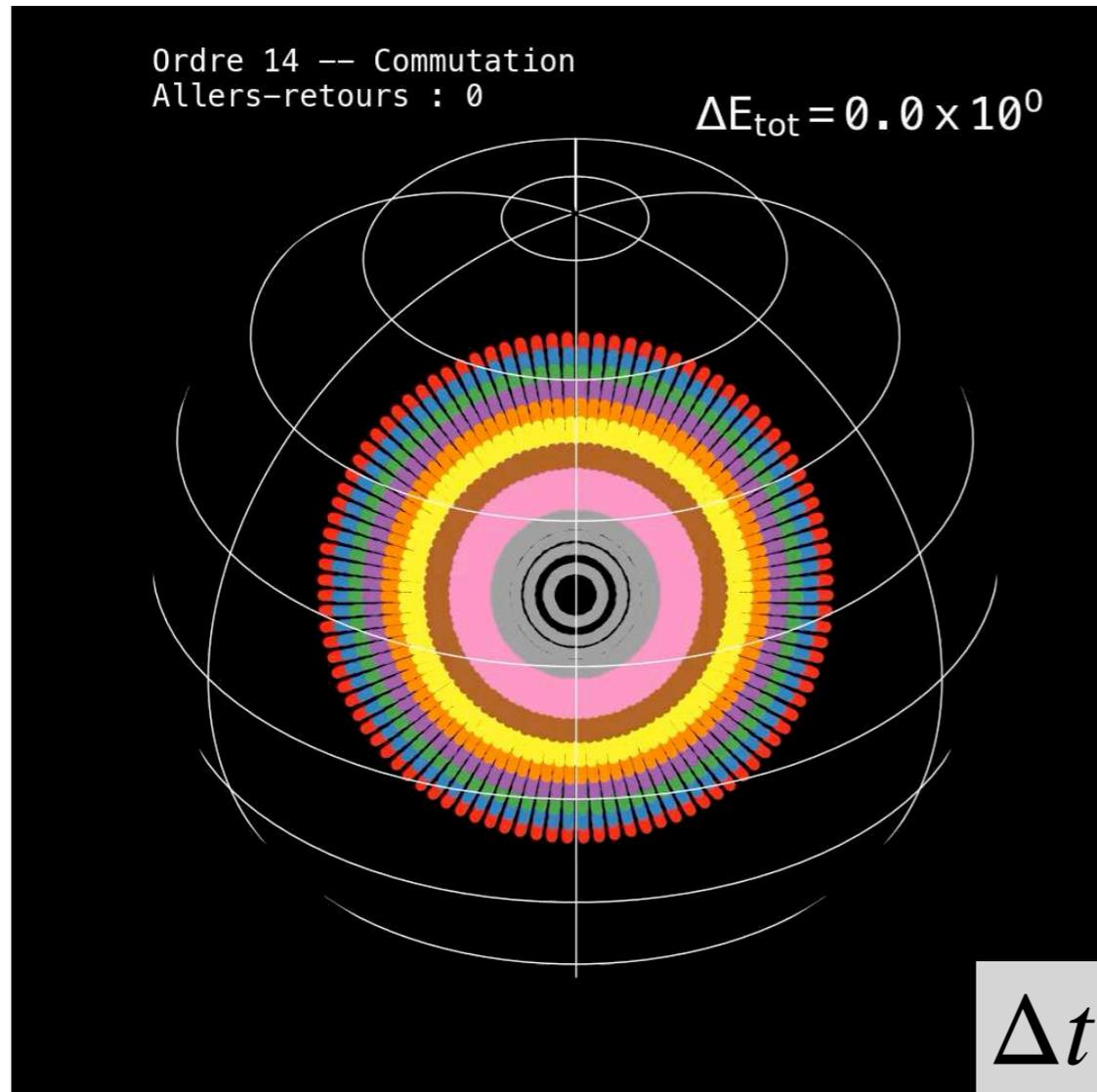


Erreur /  $10^{14}$

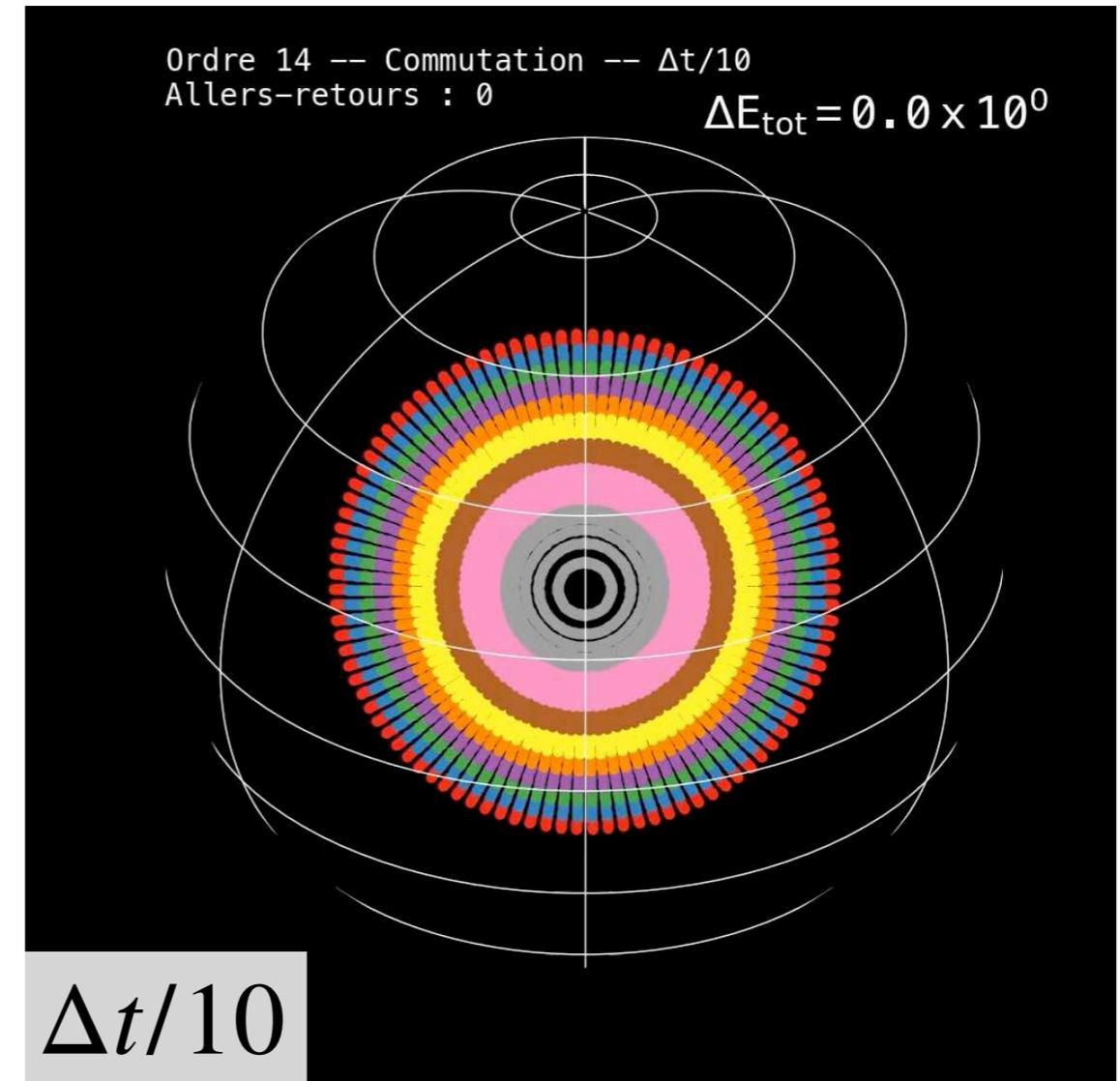
Une simulation 10x plus coûteuse  
offre **14 chiffres significatifs supplémentaires !**

# Pollution numérique

Essayons pour voir



Erreur  $\simeq 10^{-13}$

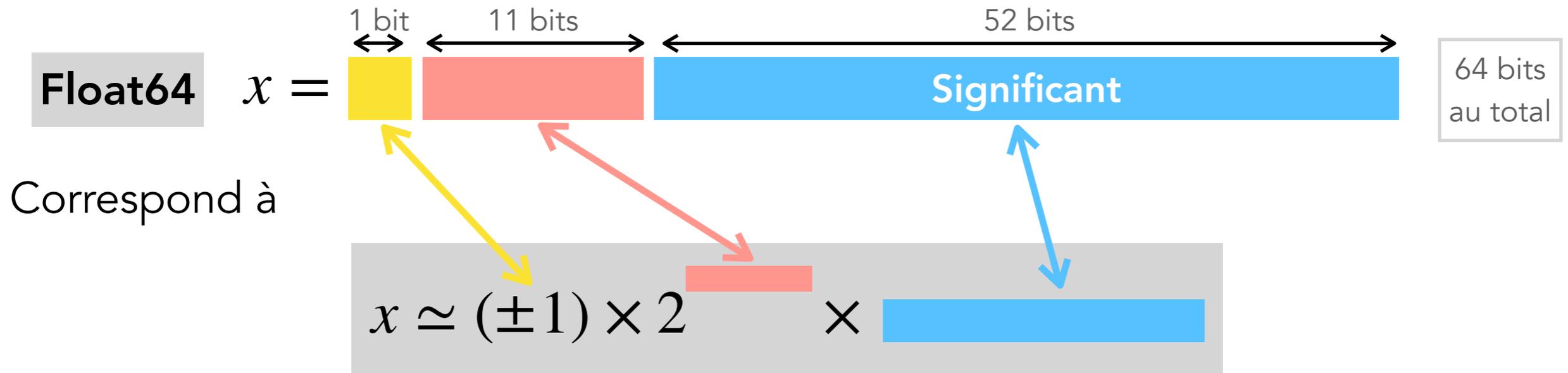


Erreur  $\simeq 10^{-14}$

1 chiffre significatif supplémentaire au lieu de 14. Pas glop

# Précision numérique

Représentation des nombres en "double précision"

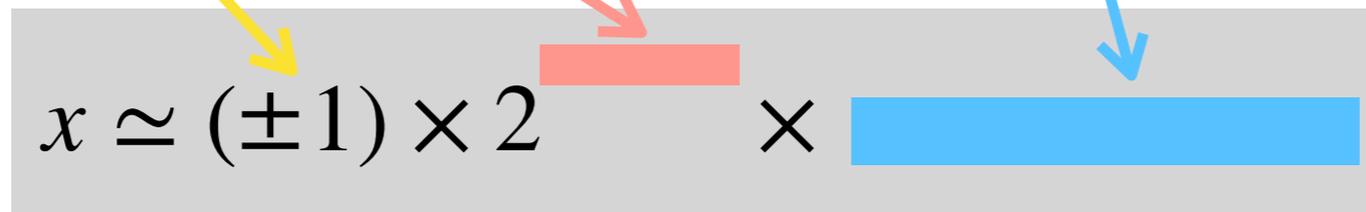


# Précision numérique

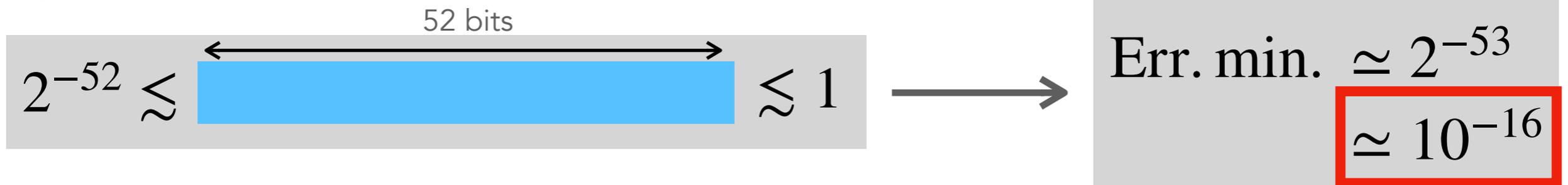
Représentation des nombres en "double précision"



Correspond à



**Significant**



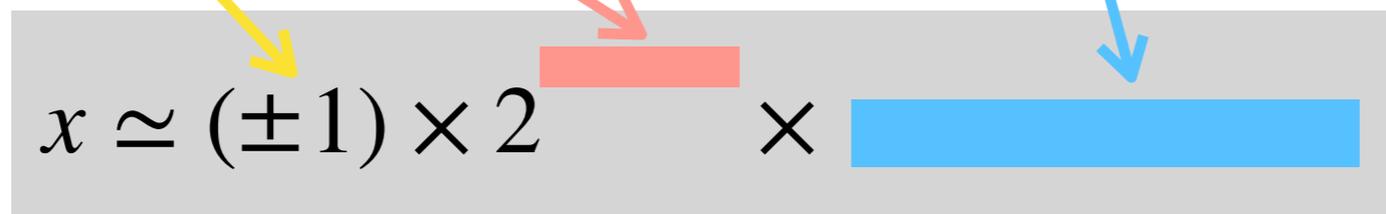
16 chiffres significatifs maximum

# Précision numérique

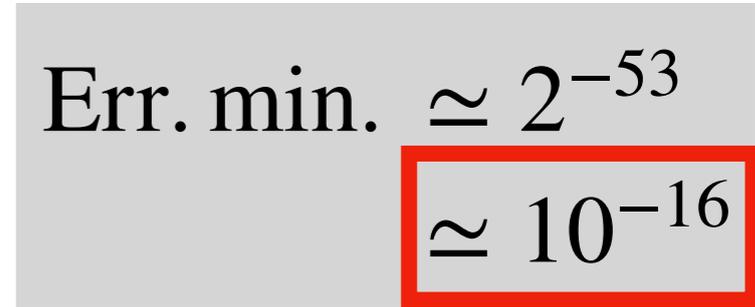
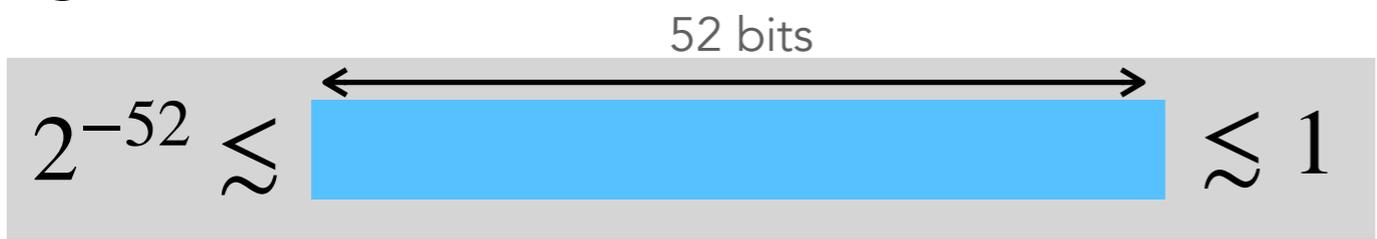
Représentation des nombres en "double précision"



Correspond à

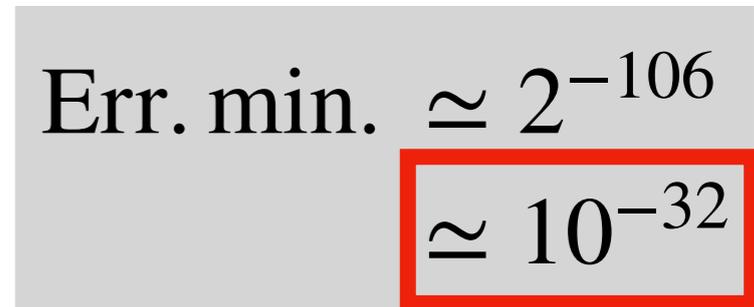


**Significant**



16 chiffres significatifs maximum

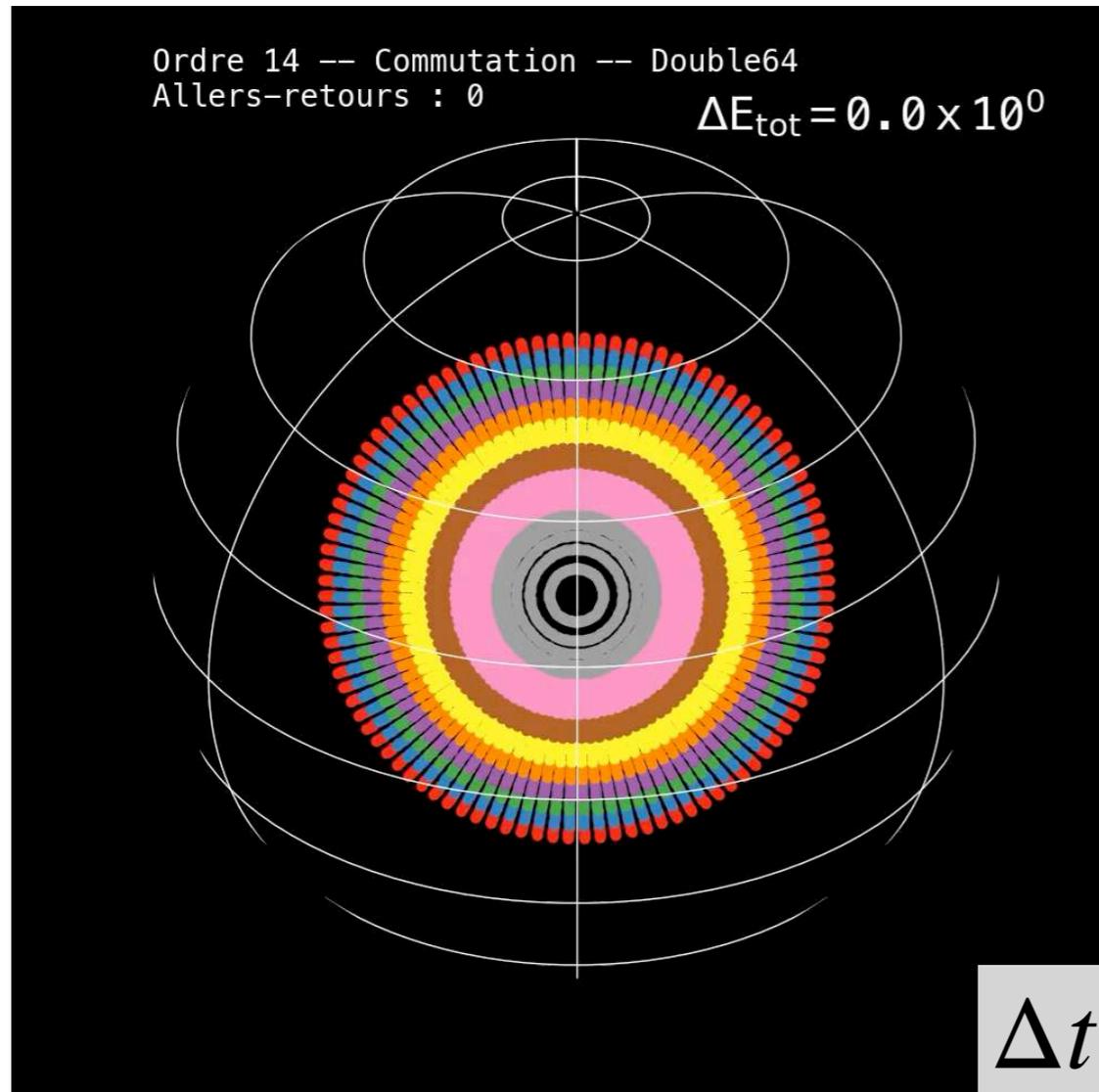
Plus de précision grâce aux "double-double"



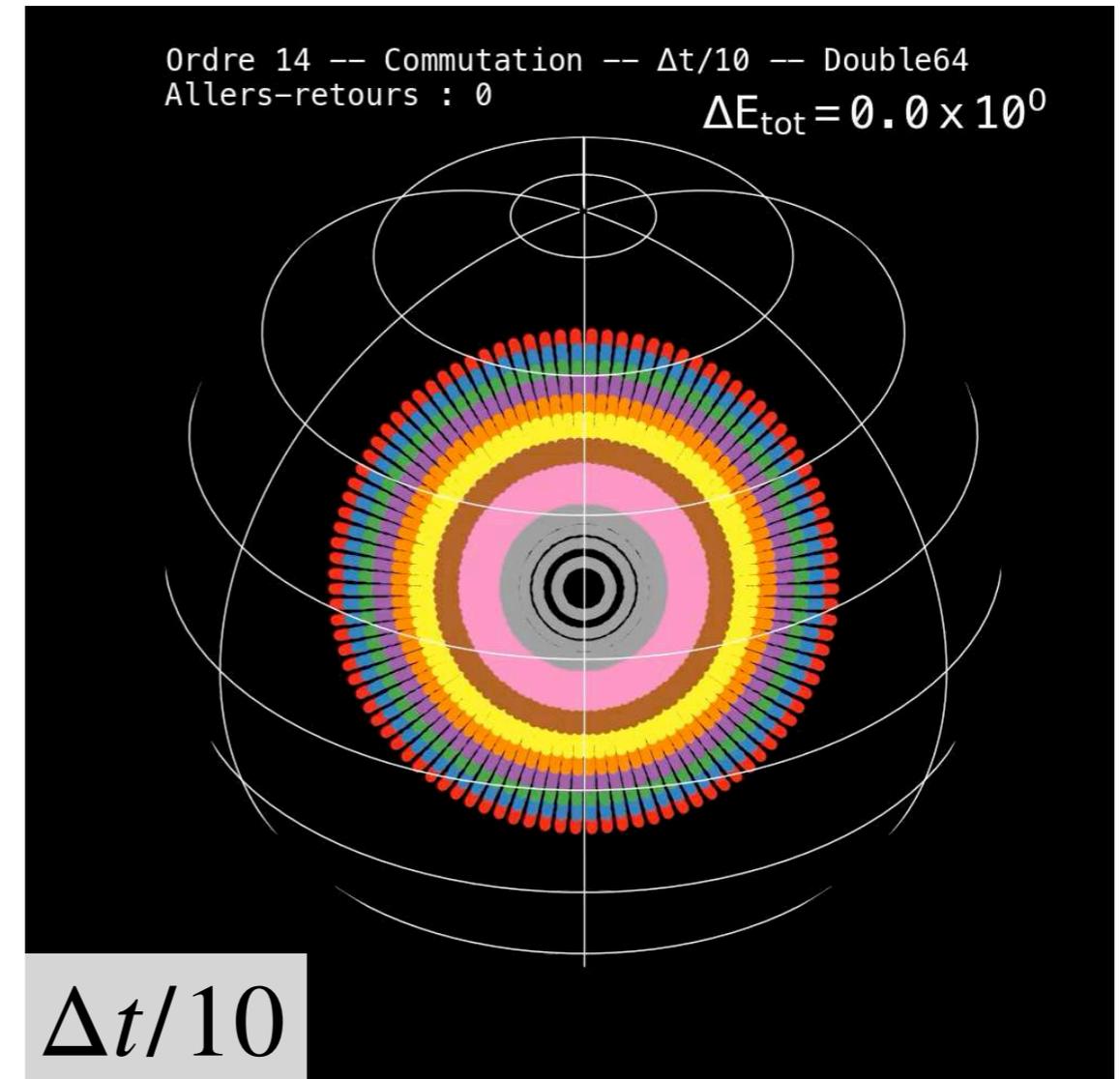
32 chiffres significatifs maximum

Enfin !

Nouvelle tentative



Erreur  $\simeq 10^{-13}$



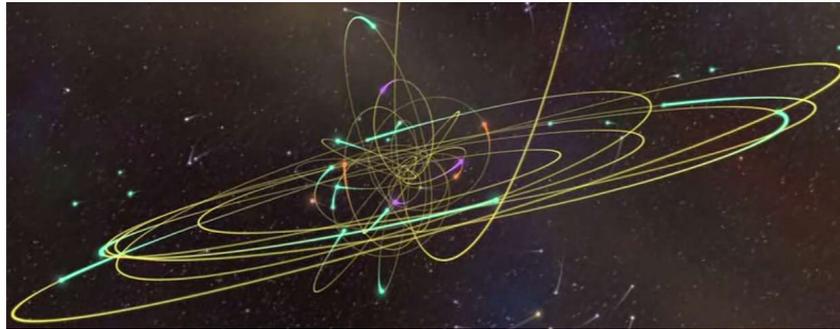
Erreur  $\simeq 10^{-28}$

Joie, joie, pleurs de joie

# Simulation éternelle

Erreur initiale

Disque d'étoiles de SgrA\*



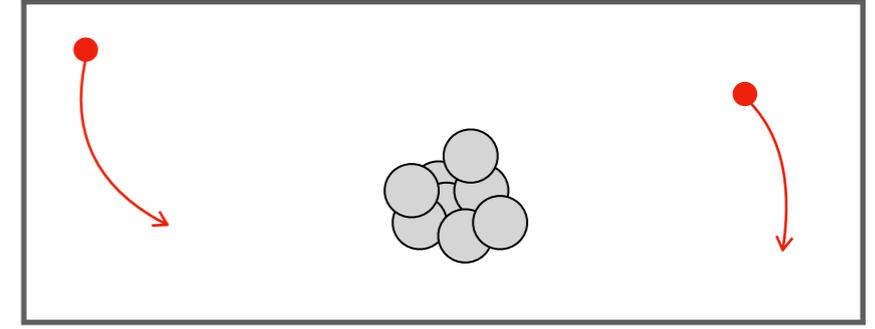
$10 \text{ mpc} \simeq 10^{14} \text{ m}$



$\times 10^{-28}$

Précision

Noyau atomique

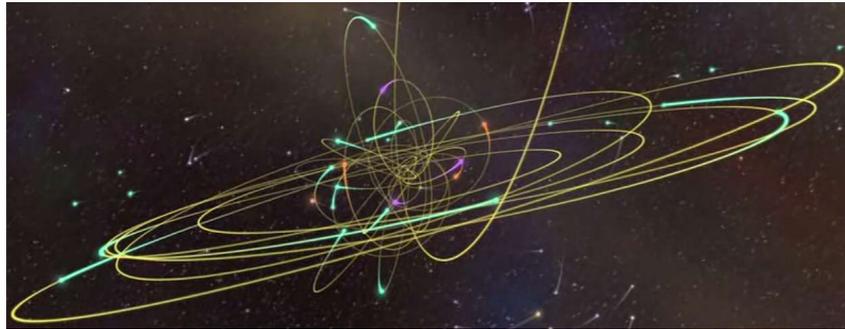


$1 \text{ fm} \simeq 10^{-14} \text{ m}$

# Simulation éternelle

Erreur initiale

Disque d'étoiles de SgrA\*



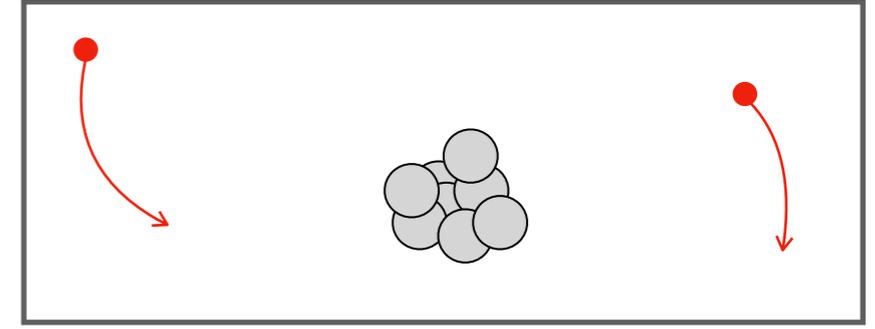
$10 \text{ mpc} \simeq 10^{14} \text{ m}$



$\times 10^{-28}$

Précision

Noyau atomique



$1 \text{ fm} \simeq 10^{-14} \text{ m}$

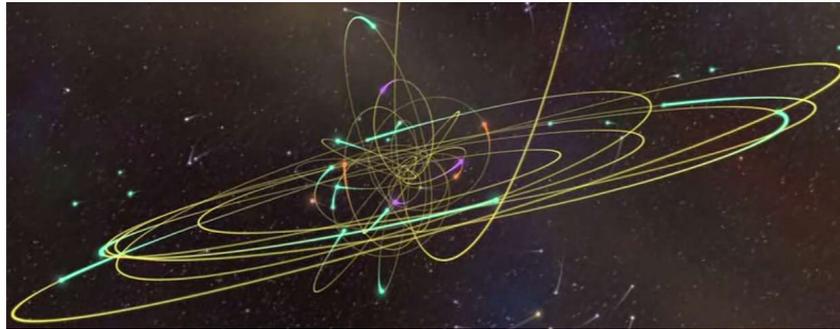
Coût de la simulation

**1 oscillation en 1 seconde avec 10 watts**

# Simulation éternelle

Erreur initiale

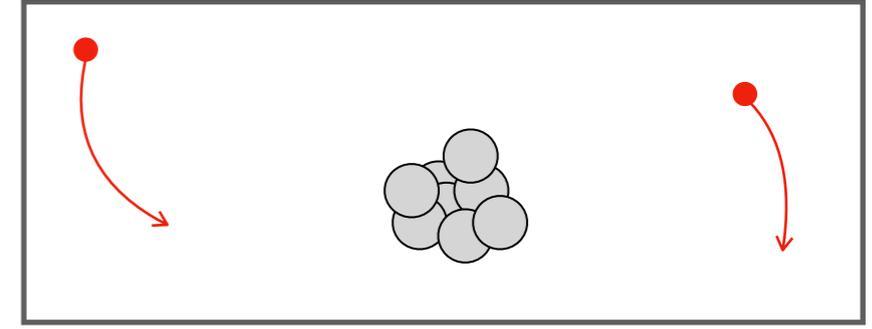
Disque d'étoiles de SgrA\*



$10 \text{ mpc} \simeq 10^{14} \text{ m}$

$\times 10^{-28}$   
Précision

Noyau atomique



$1 \text{ fm} \simeq 10^{-14} \text{ m}$

Coût de la simulation

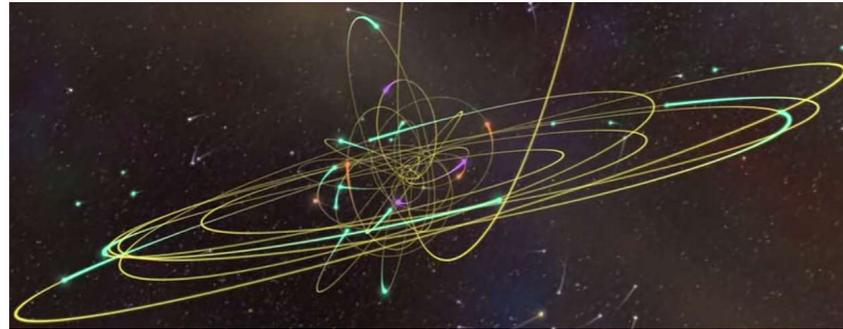
**1 oscillation en 1 seconde avec 10 watts**

Nombre d'oscillations	1
Erreur longueur	Noyau atomique 10 fm
Energie consommée	Bouillir 1 goutte d'eau
Date résultats	Slide suivante 1 s

# Simulation éternelle

Erreur initiale

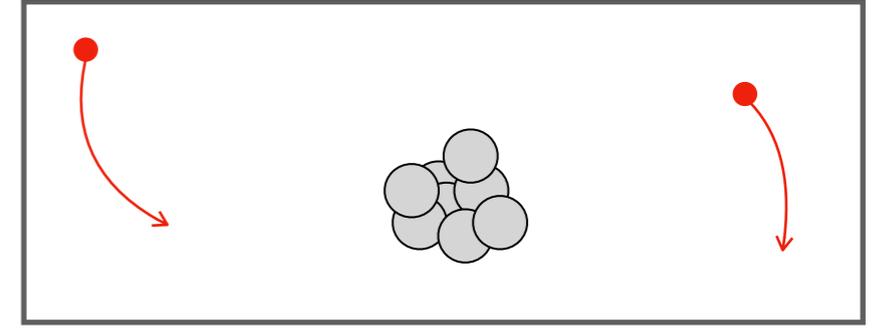
Disque d'étoiles de SgrA\*



$10 \text{ mpc} \simeq 10^{14} \text{ m}$

$\times 10^{-28}$   
Précision

Noyau atomique



$1 \text{ fm} \simeq 10^{-14} \text{ m}$

Coût de la simulation

**1 oscillation en 1 seconde avec 10 watts**

Nombre d'oscillations	1	$10^6$
Erreur longueur	Noyau atomique 10 fm	Virus 10 nm
Energie consommée	Bouillir 1 goutte d'eau	1 cycliste, 1 étape du Tour de France
Date résultats	Slide suivante 1 s	Jeudi 29 juin, midi ~ 11 jours

# Simulation éternelle

Erreur initiale

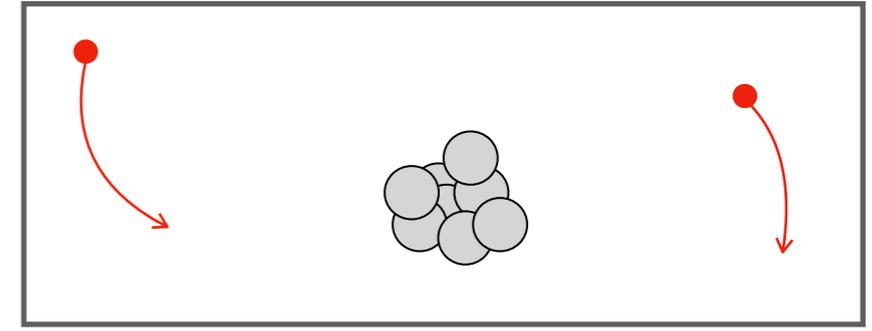
Disque d'étoiles de SgrA\*



$10 \text{ mpc} \simeq 10^{14} \text{ m}$

$\times 10^{-28}$   
Précision

Noyau atomique



$1 \text{ fm} \simeq 10^{-14} \text{ m}$

Coût de la simulation

**1 oscillation en 1 seconde avec 10 watts**

<b>Nombre d'oscillations</b>	1	$10^6$	$10^{12}$
<b>Erreur longueur</b>	Noyau atomique 10 fm	Virus 10 nm	Fourmi 1 cm
<b>Energie consommée</b>	Bouillir 1 goutte d'eau	1 cycliste, 1 étape du Tour de France	3h d'une centrale nucléaire
<b>Date résultats</b>	Slide suivante 1 s	Jeudi 29 juin, midi ~ 11 jours	Nuit Astro n°31693 ~ 30 000 ans

# Simulation éternelle

Erreur initiale

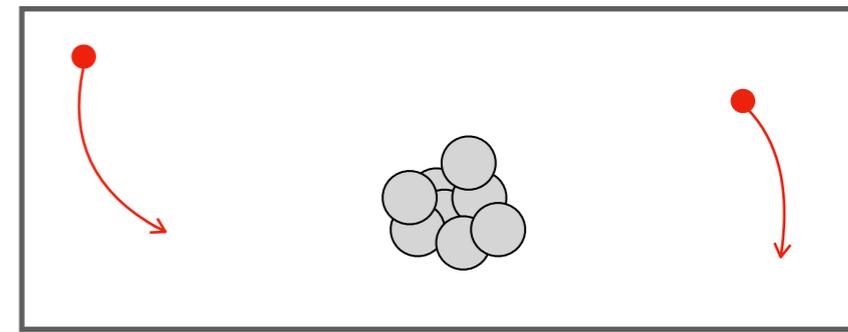
Disque d'étoiles de SgrA\*



$10 \text{ mpc} \simeq 10^{14} \text{ m}$

$\times 10^{-28}$   
Précision

Noyau atomique



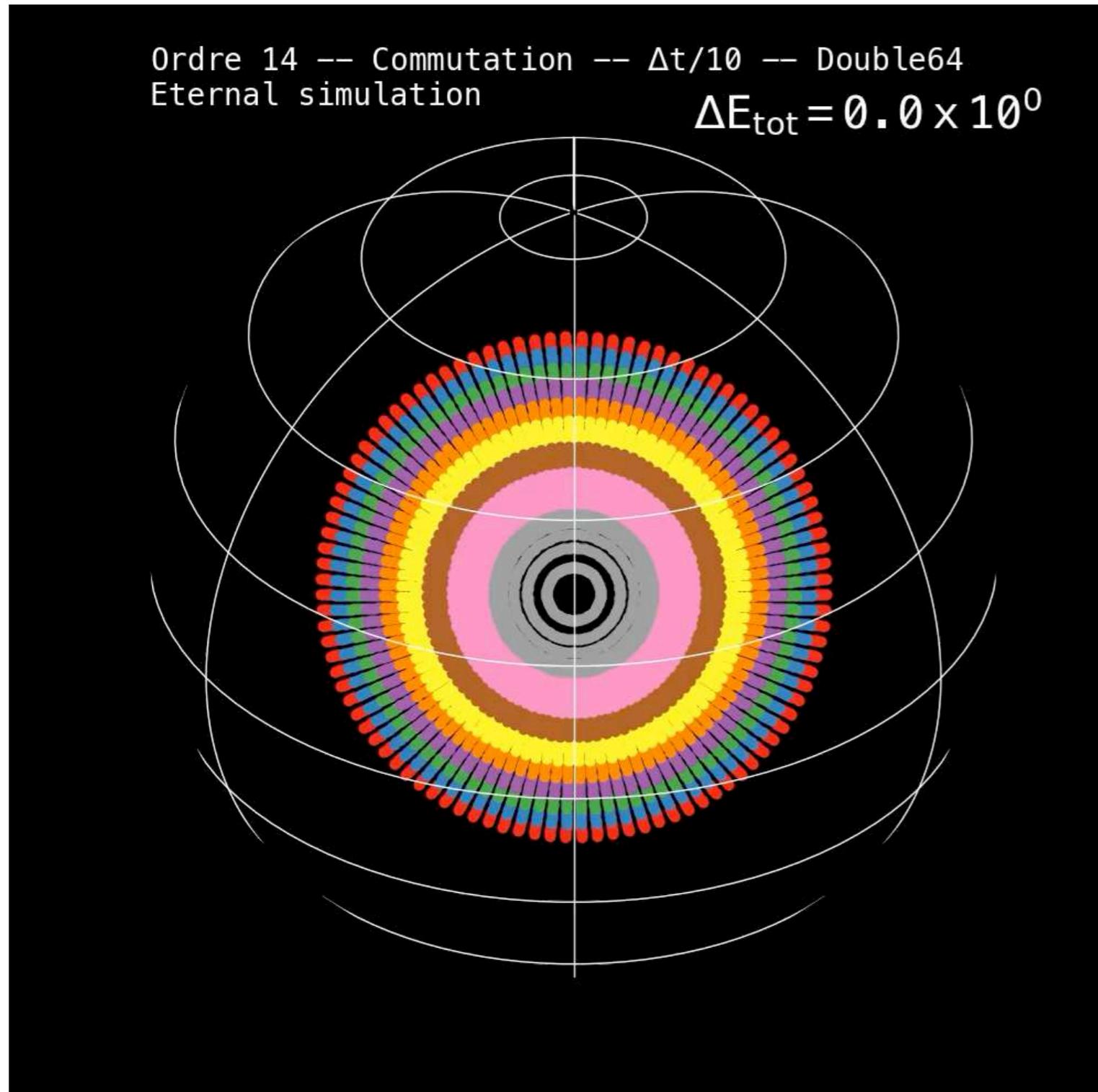
$1 \text{ fm} \simeq 10^{-14} \text{ m}$

Coût de la simulation

**1 oscillation en 1 seconde avec 10 watts**

<b>Nombre d'oscillations</b>	1	$10^6$	$10^{12}$	$10^{18}$
<b>Erreur longueur</b>	Noyau atomique 10 fm	Virus 10 nm	Fourmi 1 cm	Everest 10 km
<b>Energie consommée</b>	Bouillir 1 goutte d'eau	1 cycliste, 1 étape du Tour de France	3h d'une centrale nucléaire	1h de Soleil sur toute la Terre
<b>Date résultats</b>	Slide suivante 1 s	Jeudi 29 juin, midi ~ 11 jours	Nuit Astro n°31693 ~ 30 000 ans	Age de l'Univers ~ $10^{10}$ ans

# Simulation éternelle



Sit back, relax, and enjoy

On a vu

Invariance adiabatique

Etoile → Anneau

Flot intrinsèque

Rotation

Méthodes Runge-Kutta

Intégration à haut-rang

Groupes de Lie

Commutation des rotations

Erreurs d'arrondi

Float64 → Double64

On aurait pu voir

Accélération multipole

Parallélisation

Vectorisation

Symplecticité

Tranchage Hamiltonien

...

**Un exemple de mort  
thermodynamique**

